
QA
1
J6836
sér.4
t.4E
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME QUATRIÈME

Année 1895.



PARIS
LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15

1895

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mme Vve **F. Prime.**

I. — Sur la division des nombres entiers.

1. Dans les traités d'arithmétique, on évite de définir la division de deux nombres entiers; on définit leurs quotients approchés à moins d'une unité par défaut et par excès et on reprend la détermination du quotient exact après la théorie des fractions. Il en résulte des longueurs que l'on peut éviter, ainsi que nous voulons le montrer, en considérant la division comme *une opération par laquelle, connaissant un produit (le dividende* D*) et le multiplicande (le diviseur* d*), on recherche le multiplicateur (le quotient* q*).*

2. **Théorème I.** — *Je dis que* $q = \frac{D}{d}$.

Car, pour former D avec d, on peut partager d en d parties égales et prendre D fois l'une des parties. Il en résulte que $D = d.\frac{D}{d}$.

3. **Théorème II.** — *Le quotient* q *est l'une des parties du dividende* D *partagé en* d *parties égales.*

En effet, pour partager D en d parties égales, partageons, en d parties égales, chacune des unités dont se compose D et prenons une partie à chaque unité; nous obtenons ainsi la fraction $\frac{D}{d}$.

4. **Corollaire.** — $D = q.d.$

5. Il résulte de là que la division permet encore de retrouver le multiplicande quand on connaît le multiplicateur et le produit.

6. *Définitions.* — Si l'on a, à la fois.

$$D = d.Q + R \quad \text{et} \quad R < d,$$

Q s'appelle le *quotient par défaut* et R, le *reste par défaut* de la division de D par d.

En posant $\quad Q' = Q + 1 \quad$ et $\quad R' = d - R,$
on a $\quad D = d.Q' - R' \quad$ et $\quad R' < d;$

Q′ est alors le *quotient par excès* et R′ *le reste par excès*.

7. **Théorème III.** — *Si* $D = dQ + R$, *on a* $q = Q + \frac{R}{d}$.

Le théorème revient à démontrer que

$$D = d.\left(Q + \frac{R}{d}\right).$$

Or, pour former $Q + \frac{R}{d}$ avec l'unité, on a, d'abord, pris Q fois l'unité et on y a ajouté R fois la $d^{\text{ième}}$ partie de l'unité. Pour obtenir le produit indiqué, prenons donc Q fois d ce qui donne dQ et ajoutons-y R fois le $d^{\text{ième}}$ de d ou R; nous trouvons ainsi $d.Q + R$ ou D.

8. **Théorème IV.** — *Si* $D = dQ' - R'$, *on a* $q = Q' - \frac{R'}{d}$. Même démonstration.

9. **Théorème V.** — *Si on multiplie deux nombres par un troisième, les quotients approchés ne changent pas, mais les restes sont multipliés par ce nombre.*

En effet, les relations

$$D = d.Q \pm R \qquad \text{et} \qquad R < d$$

entraînent $\quad D.a = (da).Q \pm Ra \qquad$ et $\qquad Ra < da.$

10. **Théorème VI.** — *Si l'on divise deux nombres par un facteur commun, leurs quotients approchés ne changent pas, mais les restes sont divisés par ce facteur.*

Pour fixer les idées, prenons une division faite par défaut; les relations

$$Da = da.Q + R, \qquad R < d.a$$

donnent $\quad da.Q < Da < da.(Q + 1),$
d'où $\quad d.Q < D < d.(Q + 1).$

On peut donc écrire $D = d.Q + R_1$,
avec $R_1 < d$;
ce qui montre, déjà, que le quotient par défaut n'a pas changé.

Le théorème V donne ensuite

$$R = R_1.a.$$

11. **Théorème VII.** — *Dans les conditions du théorème V, comme dans celles du théorème VI, le quotient exact ne change pas.*

En effet, les fractions $\frac{D}{d}$ et $\frac{Da}{da}$ sont égales. La seconde contient a fois plus de parties que n'en contient l'autre, mais les parties qui la composent sont a fois plus petites que celles qui composent la première.

SUR LA SOMME DES M^IÈMES PUISSANCES

DES COSINUS D'ARCS EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE

Par M. **F. X. Y.**

Soit S_m la somme cherchée

$$S_m = \cos^m a + \cos^m (a + h) + \ldots + \cos^m (a + (n - 1)h).$$

De la formule générale de multiplication des arcs :

$$\cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{2!} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots + (-1)^p \frac{m(m-1)\ldots(m-2p+1)}{2p!} \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a \pm \ldots$$

on déduit l'égalité

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos^m a &= \cos ma \\ &+ C_m^2 \cos^{m-2} a \sin^2 a - C_m^4 \cos^{m-4} a \sin^4 a + \ldots \\ &+ (-1)^{p-1} C_m^{2p} \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a \pm \ldots \end{aligned} \right.$$

C_m^{2p} désignant le nombre des combinaisons de m objets, $2p$ à $2p$.

Si l'on remplace, successivement, dans l'égalité (1), a par $a + h$, $a + 2h$, ... $a + (n - 1)h$, on obtient les $(m - 1)$ égalités suivantes :

$$\cos^m(a+h) = \cos m(a+h) + C_m^2 \cos^{m-2}(a+h)\sin^2(a+h)$$
$$- C_m^4 \cos^{m-4}(a+h)\sin^4(a+h)$$
$$+ \ldots + (-1)^{p-1} C_m^{2p} \cos^{m-2p}(a+h)\sin^{2p}(a+h)$$

. . . .

$$\cos^m\left(a+(n-1)h\right) = \cos m\left(a+(n-1)h\right)$$
$$+ C_m^2 \cos^{m-2}\left(a+(n-1)h\right)\sin^2\left(a+(n-1)h\right)$$
$$- C_m^4 \cos^{m-4}\left(a+(n-1)h\right)\sin^4\left(a+(n-1)h\right) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1} C_m^{2p} \cos^{m-2p}\left(a+(n-1)h\right)\sin^{2p}\left(a+(n-1)h\right)$$

d'où l'on déduit en ajoutant ces égalités

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} S_m = [\cos ma + \cos m(a+h) + \ldots \\ \quad + \cos m\left(a+(n-1)h\right)] + C_m^2 \Sigma \cos^{m-1} a \sin^2 a \\ \quad - C_m^4 \Sigma \cos^{m-4} a \sin^4 a + \ldots \\ \quad + (-1)^{p-1} C_m^{2p} \Sigma \cos^{m-2p} a \sin^{2p} a \pm \ldots \end{array}\right.$$

La somme des termes entre crochets est la somme de cosinus d'arcs en progression arithmétique; elle a pour expression, d'après une formule connue :

$$\frac{\cos m\left(a+(n-1)\dfrac{h}{1}\right)\sin\dfrac{mnh}{2}}{\sin\dfrac{mh}{2}}.$$

On a, d'autre part :

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$
$$\sin^4 a = 1 - 2\cos^2 a + \cos^4 a$$

. . . .

$$\sin^{2p} a = 1 - p\cos^2 a + \frac{p(p-1)}{2!}\cos^4 a + \ldots + (-1)^p \cos a^{2p}$$

L'égalité (2) peut donc s'écrire :

$$Sm = \frac{\cos m\left(a+(n-1)\dfrac{h}{1}\right)\sin\dfrac{mnh}{2}}{\sin\dfrac{mh}{2}} + C_m^2(S_{m-2} - S_m)$$
$$- C_m^4(S_{m-4} - 2S_{m-2} + S_m m) + \ldots$$
$$+ (-1)_{p-1} C_m^{2p}\Big(S_{m-2p} - pS_{m-2p+2}$$
$$+ \frac{p(p-1)}{2!} S_{m-2p+4} \pm \ldots + (-1)^p S_m\Big) + \ldots$$

et, en ordonnant :

$$(3)\left\{\begin{aligned} S_m(1+C_m^2+C_m^4+\ldots) &= \frac{\cos m\left(a+(n-1)\frac{h}{1}\right)\sin\frac{mnh}{2}}{\sin\frac{mh}{2}} \\ &+ S_m - 2(C_m^2 + 2C_m^4 + 3C_m^6 + \ldots) \\ &- S_m - 4(C_m^4 + 3C_m^6 + 4C_m^8 + \ldots) \\ &+ (-1)^{p-1}S_m - 2p\left(C_m^2 + (p+1)C_m^{2p+2}\right. \\ &\left.+ (p+2)C_m^{2p+4} + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

On peut, à l'aide de cette formule, calculer successivement $S_2, S_4 \ldots S_{2p}, S_3, S_5 \ldots S_{2p-1} \ldots$

$$S_2 = \frac{\cos\left(2a + (n-1)h\right)\sin nh}{2\sin h} + \frac{n}{2}$$

$$S_3 = \frac{1}{4}\,\frac{\cos 3\left(a + (n-1)\frac{h}{1}\right)\sin\frac{3nh}{2}}{\sin 3h} + \frac{3}{4}\,\frac{\cos\left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)\sin\frac{hn}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

$$S_4 = \frac{\cos\left(4a + (n-1)2h\right)\sin 2nh}{8\sin 2h} + \frac{\cos\left(2a + (n-1)h\right)\sin nh}{2\sin h} + \frac{3n}{8}$$

. . . .

Si dans la formule (3) on change a en $\frac{x}{2} - a$ et h en $-h$, on obtient une expression de la somme des m^ièmes^ puissances des sinus d'arcs en progression arithmétique.

Si dans la formule (3) on fait $h = \frac{2x}{n}$ il vient :

$$\begin{aligned} S_m(1 + C_m^2 + C_m^4 + \ldots) = S_{m-2}(C_m^2 + 2C_m^4 + 3C_m^6 + \ldots) \\ - S_{m-4}(C_m^4 + 3C_m^6 + 4C_m^8 + \ldots) \\ + \ldots + (-1)^{p-1}S_{m-2p}\left(C_m^{2p} + (p+1)C_m^{2p+2} + (p+2)C_m^{2p+4} + \ldots\right. \end{aligned}$$

Or, on vérifie aisément que $S_1 = 0$.

On a donc $S_3 = 0,\ S_5 = 0 \ldots S_{2p+1} = 0$.

On voit de même que $S_2 = \frac{n}{2}\ S_4 = \frac{3n}{8} \ldots$

Ainsi, dans ce cas, la somme S_m est indépendante des angles.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1894

Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère un quadrilatère Q *de sommets* A, B, C, D, *dont les diagonales se coupent en* O, *et les cercles circonscrits aux triangles* OAB, OBC, OCD *et* ODA. *Les centres* O_1, O_2, O_3, O_4 *de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme* P.

1° *Le parallélogramme* P *étant donné, démontrer que tous les quadrilatères* Q *qui lui correspondent ont une surface constante et des diagonales de longueur constante.*

2° *Le parallélogramme* P *étant donné et le point* O *étant assujetti à décrire une droite* Δ, *prouver que les sommets du quadrilatère* Q *se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme* P'; *étudier la déformation de* P' *quand* Δ *varie; trouver les positions de la droite* Δ *pour lesquelles le parallélogramme* P' *a une surface maximum.*

3° *Construire le quadrilatère* Q, *connaissant le parallélogramme* P *et soit deux angles de* Q, *soit les rapports* $\frac{AB}{AD}$ *et* $\frac{CB}{CD}$. *Discuter.*

4° *On suppose que le quadrilatère* Q *soit inscriptible; connaissant le parallélogramme* P, *trouver le lieu des sommets de* Q *et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère. (Ces lieux sont des coniques.)*

1°. Soient A', B', C', D' les points milieux des segments OA, OB, OC, OD. Élevons en A' et C' sur AC, puis en B' et D' sur BD des perpendiculaires. Ces droites parallèles, deux à deux déterminent le parallélogramme $O_1O_2O_3O_4$.

Les droites A'C' et B'D' sont les hauteurs de P. On a donc pour l'aire de ce parallélogramme : $P = \frac{A'C'.B'D'}{\sin O}$.

De par la construction $AC = 2A'C'$ et $BD = 2B'D'$.

Or, aire $Q = \frac{AC.BD}{2} \sin O = 2A'C'.B'D' \sin O$

$$Q = 2P \sin^2 O$$

3°. Les quadrilatères ABCD et A'B'C'D' sont homothétiques; le rapport de similitude étant 1 : 2. P étant donné, il suffira donc de construire, dans les trois cas proposés, les quadrilatères A'B'C'D'.

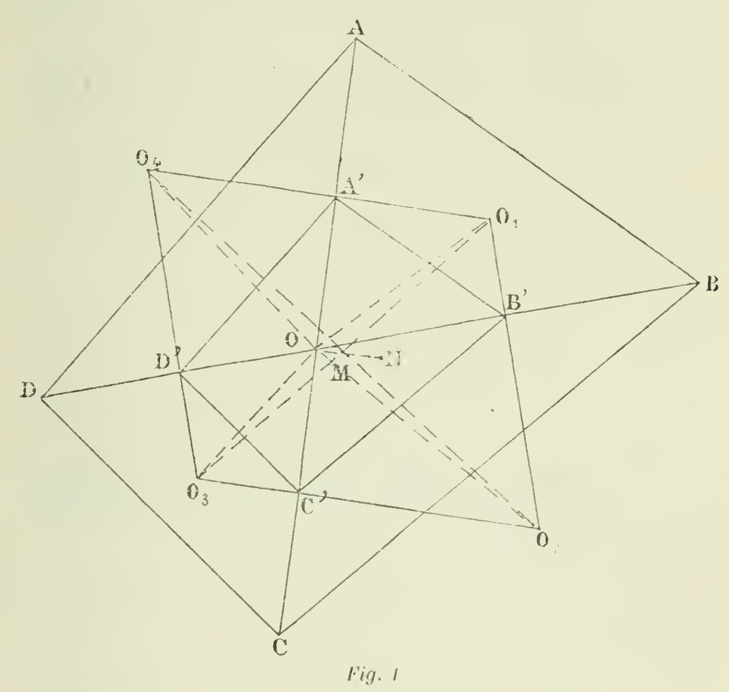


Fig. 1

1er CAS : *2 angles adjacents* A *et* B *sont donnés.*

Dans les quadrilatères inscriptibles $D_1OA_1O_4$ et $A_1OB_1O_1$ on a angle $D_1A_1O = OO_4D_1$ et angle $OA_1B_1 = OO_1B_1$; il en résulte angle $O_4OO_1 = A_1$; de même angle $O_1OO_2 = B_1$.

Le point O est donc déterminé par l'intersection de deux segments de cercles décrits sur les côtés O_4O_1 et O_1O_2 et capables respectivement des angles A_1 et B_1. Les pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les côtés de P sont les sommets du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$. Ce cas admet une solution unique.

2me Cas : *2 angles opposés A′ et C′ sont donnés.*

Comme dans le cas précédent, le point O est déterminé par l'intersection de deux segments de cercles décrits sur les côtés O_1O_4 et O_2O_3 et capables respectivement des angles A_1 et C_1.

Ce cas admet deux solutions, une solution ou aucune solution, suivant que les cercles se coupent, se touchent ou ne se coupent pas.

3me Cas : *On connaît les rapports* $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$.

Dans le quadrilatère inscriptible $A_1OB_1O_1$ on a

$$A_1B_1 = OO_1 \sin O:$$

de même

$$A_1D_1 = OO_4 \sin O.$$

Donc

$$\frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{OO_1}{OO_4};$$

on trouve identiquement

$$\frac{C_1B_1}{C_1D_1} = \frac{OO_2}{OO_3}.$$

Le point O est donc déterminé par l'intersection de deux cercles d'Apollonius. Même remarque que précédemment pour le nombre des solutions.

4°. Dans les quadrilatères inscriptibles $D_1OA_1O_4$ et $B_1OC_1O_2$ on a :

$$\text{angle } OA_1D_1 = OO_4D_1 \text{ et angle } OB_1C_1 = OO_2C_1.$$

Le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant inscriptible, on a aussi

$$\text{angle } OA_1D_1 = OB_1C_1$$

et par conséquent,

$$\text{angle } OO_4O_3 = OO_2O_3 = \varphi.$$

Les rayons O_4O et O_2O décrivent donc deux faisceaux symétriquement égaux admettant comme rayons homologues : pour $\varphi = o$, O_4O_3 et O_2O_3; et pour $\varphi = O_4$, O_4O_1 et O_2O_1.

Le lieu du point O est une hyperbole équilatère circonscrite au parallélogramme P. Ses asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles de P. Les lieux des sommets du quadrilatère Q sont donc des hyperboles équilatères symétriques du lieu de O par rapport aux côtés de P.

Les perpendiculaires élevées sur $B'D'$ et $A'C'$ en leurs points milieux x et y se coupent en M, centre de la circonférence circonscrite à $A'B'C'D'$ et point de rencontre des diagonales du parallélogramme P.

Or les centres M et N des circonférences circonscrites aux quadrilatères $A'B'C'D'$ et ABCD sont des points homologues de deux figures homothétiques; donc N est le symétrique de O par rapport au point fixe M et, comme ce dernier est le centre de l'hyperbole équilatère lieu de O, il résulte que les lieux de O et de N coïncident.

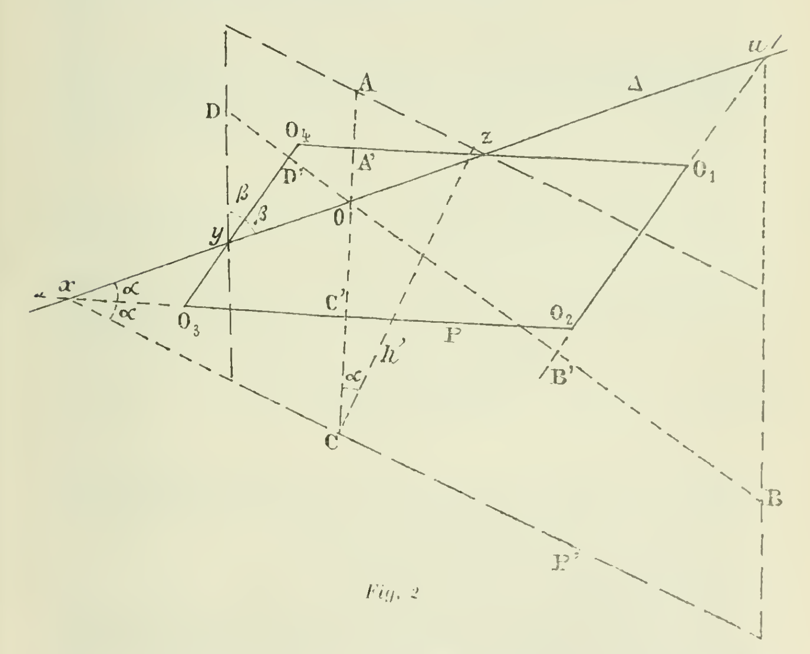


Fig. 2

2°. Supposons que la droite Δ rencontre les côtés O_2O_3 et O_2O_1 du parallélogramme respectivement sous les angles α et β; on a évidemment $\alpha + \beta = O$, angle du parallélogramme. Représentons par x, y, z, u les intersections de Δ avec les côtés de P. A étant le symétrique de O par rapport au côté O_1O_4, lorsque O se meut sur Δ, A décrira une droite symétrique de Δ par rapport à O_1O_4 ; de même pour

les autres sommets. Les symétriques de Δ relatives à deux côtés opposés de P sont évidemment parallèles. car elles forment avec ces côtés des angles égaux α ou β. On obtient donc un parallélogramme P′ d'angles $2(\alpha + \beta) = 2\theta$ et $180 - 2\theta$ dont nous allons évaluer la surface.

Représentons par h' et h'' les hauteurs de ce parallélogramme.

On trouve aisément

$$h' = \mathrm{AC}. \cos\alpha, \quad h'' = \mathrm{BD} \cos\beta,$$

d'où

$$\mathrm{P}' = \frac{h'h''}{\sin 2\theta} = \frac{\mathrm{AC}.\mathrm{BD} \cos\alpha . \cos\beta}{\sin 2\theta}.$$

Il résulte de cette formule que la surface de P′ ne change pas lorsque Δ se déplace parallèlement à elle-même.

Comme $\alpha + \beta = \text{constante} = \theta$, le maximum de $\cos\alpha \cos\beta$ a lieu pour $\alpha = \beta$ en vertu de l'identité :

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos\alpha \cos\beta.$$

P′ a donc sa valeur maximum lorsque Δ est également inclinée sur les côtés de P.

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin**

---

356. — *Trouver trois carrés entiers en progression arithmétique.*

On a à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$X^2 + Y^2 = 2Z^2,$$

qui est complètement résolue par l'identité

$$(2a^2 - b^2)^2 + (2a^2 + b^2 - 4ab)^2 \equiv 2(2a^2 - 2ab + b^2)^2,$$

où a et b sont des entiers quelconques. Le problème admet donc une infinité de solutions. On peut remarquer que les trois nombres X, Y, Z sont de la même parité, celle de b.

357. — *On partage la suite naturelle des nombres en groupes contenant le premier trois nombres, le deuxième cinq nombres, ... le* $n^{\text{ième}}$, $2n + 1$ *nombres; vérifier que le premier nombre du* $n^{\text{ième}}$ *groupe est* n^2 *et que la somme des* $n + 1$ *premiers termes de ce groupe est égale à la somme des* n *derniers.*

Il en résulte que les carrés des nombres

$$2n^2 - 1, \qquad 2n^2 + 2n + 1, \qquad 2n^2 + 4n + 1,$$

(n entier, positif quelconque) sont en progression arithmétique, ce qui nous fournit une infinité de solutions, mais non toutes les solutions de la question posée à l'exercice précédent. Ces solutions répondent à l'hypothèse $b = -1$.

358. — *Trouver trois triangulaires en progression arithmétique.*

On a à résoudre en nombres entiers l'équation

$$2m(m+1) = n(n+1) + p(p+1).$$

Si on pose

$$m = \frac{z-1}{2}, \qquad n = \frac{x-1}{2}, \qquad p = \frac{y-1}{2},$$

l'équation précédente revient à

(1) $$2Z^2 = x^2 + y^2$$

et le problème considéré se ramène à celui de l'exercice 356. On aura donc des valeurs convenables pour m, n, p, en partant des solutions impaires de l'équation (1). Toutes les solutions du problème proposé sont alors fournies par l'identité :

$$\frac{1}{2}(a^2-2b^2-2b-1)(a^2-2b^2-2b)+\frac{1}{2}(a^2+2b^2-4ab-2a+2b)(a^2+2b^2-4ab-2a+2b+1)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(a^2-2ab+2b^2-a+2b)(a^2-2ab+2b^2-a+2b+1),$$

où a et b désignent des entiers quelconques.

359. — *Si un cube entier est terminé par* 4 *ou* 8, *le chiffre des dizaines est pair; s'il est terminé par* 2 *ou* 6, *le chiffre de ses dizaines est impair.*

360. — *On considère la suite récurrente de Lamé (ou de Fibonacci) :*

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \; \ldots\ldots \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Démontrer les formules

$$u_{2n}^2 = (2n-1)u_1^2 + (2n-2)u_2^2 + (2n-3)u_3^2 + \ldots + u_{2n-1}^2;$$

$$u_{2n+1}^2 = 1 + 2nu_1^2 + (2n-1)u_2^2 + (2n-2)u_3^2 + \ldots + u_{2n}^2,$$

$$n(n+1)u_1^2 + (n-1)nu_2^2 + (n-2)(n-1)u_3^2 + \ldots + 1.2u_n^2 = 2u_{n+1}u_{n+2} - v.$$

(v désignant celui des deux nombres $n+1$, $n+2$, qui est pair.)

$$u_{n-1}\,u_n\,u_{n+1} = u_n^3 + (-1)^n u_n$$

$$u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \ldots + u_n^3 = 1 + 3u_n\,u_{n+1}\,u_{n+3} - u_{n+2}^3.$$

361. — $u_1, u_2 \ldots u_n$ *désignant les termes de la même suite, sommer :*

$$S = \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_1^2+u_2^2} + \frac{1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2}.$$

(Question proposée par Ed. LUCAS. — *Théorie des nombres.*)

On trouve, en groupant les termes par deux, après quelques transformations :

$$S = \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

362. — *1° a désignant* $\sqrt{x}$ *évaluée à l'unité près par défaut. Si dans la transformation de* $\sqrt{x}$ *en fraction continue, la période des quotients incomplets comprend* n *fois l'unité et* 2a, *le nombre* x *a pour valeur :*

$$x = a(a + 1) + \frac{au_{n-2} + u_{n-1}}{u_{n+1}};$$

u_n *désignant le terme de rang* n *de la suite de Lamé, où l'on suppose* $u_0 = 0$.

2° On peut toujours trouver une infinité de valeurs de a *telles que* x *soit entier, sauf dans le cas où* $n + 1$ *est un multiple de* 3.

363. — *On considère la suite récurrente :*

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, \qquad u_n = pu_{n-1} - u_{n-2}.$$

Démontrer la formule :

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 - pu_n u_{n+1} = u_1^2 + u_0^2 - pu_1 u_0.$$

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Dellac, professeur au lycée de Marseille.

« ...Le théorème principal de la note de M. Dorlet sur les polyèdres semblables (*J. E.*, 1894, p. 231) n'est pas nouveau. Il y a longtemps que j'ai établi l'existence du centre de similitude de deux polyèdres semblables. On en trouve une démonstration dans les *Éléments de Géométrie* de Ricart » (2e vol., p. 133. Garnier frères.) (*).

BIBLIOGRAPHIE

Tableau métrique de Logarithmes, par M. C. Dumesnil. — Tableau complet in-8°, en noir, 0 fr. 75; in-4°, en deux couleurs, 1 fr. 50. Instruction, 1 fr. 50.

On sait que les Logarithmes permettent de ramener à de simples additions les calculs les plus compliqués; malheureusement la plupart des

(*) La question 600, proposée plus loin, fait suite à cette théorie.

Tables parues jusqu'à ce jour ont été éditées sous forme de volumes peu portatifs, d'une lecture souvent difficile.

Or le Tableau métrique de *Logarithmes* à cinq décimales, que nous avons sous les yeux, est groupé de telle sorte que les logarithmes de tous les nombres de 1 a 10.000 sont indiqués d'une façon très nette, très lisible, sur *un seul feuillet* in 4°; il est donc impossible de désirer une Table plus complète, sous une forme plus portative.

La lecture de ce tableau est si facile qu'il suffit d'une étude de quelques minutes pour être en mesure de passer instantanément, sans hésitation aucune, d'un nombre quelconque au logarithme de ce nombre, ou du logarithme au nombre.

Éléments de Trigonométrie, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne (conformes aux programmes du 15 juin 1894), par MM. Ch. Vacquant, inspecteur général et Macé de Lépinay, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV.

On sait que le programme de la trigonométrie dans l'enseignement moderne est partagé entre la seconde et la première-sciences. Ces deux programmes sont absolument distincts au point de vue des matières qui y sont traitées; l'esprit qui les inspire est aussi très différent. Ce n'est que dans la première-sciences qu'on développe le théorème des projections et qu'on établit les formules relatives à l'addition des axes, formules qui sont la conséquence toute naturelle de ce théorème fondamental. Il en résulte une difficulté qui ne se rencontre pas dans l'enseignement classique et sur laquelle nous désirons appeler l'attention de nos lecteurs.

Le programme de seconde indique, à propos de la résolution des triangles, « *on établit* GÉOMÉTRIQUEMENT *les formules dont on a besoin* ». Parmi les démonstrations, se présente celle de la formule classique

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{A+B}{2},$$

utilisée dans le *deuxième cas* (données a, b, C). On sait comment on déduit cette formule des relations

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$$

$$(3) \qquad A + B = 180^\circ - C.$$

Mais les transformations nécessaires pour déduire (1) des égalités (2), (3), ne peuvent être présentées aux élèves de la seconde moderne qui ne sont pas en possession des formules que l'on emploie dans le calcul classique auquel nous faisons allusion. C'est pourquoi, le programme exige l'établissement de (1) par des considérations géométriques. On lira à la page 81 du livre, excellent à tous les points de vue, que nous signalons à l'attention de nos lecteurs, la démonstration ingénieuse proposée par MM. Vacquant et Macé de Lépinay. Cette question n'est pas aussi simple qu'elle le paraît au premier abord. N'y a-t-il pas moyen de tourner autrement cette difficulté? Nous posons la question à nos lecteurs; peut-être intéressera-t-elle quelques-uns d'entre eux et nous publierons avec plaisir les réflexions qu'ils pourrraient nous envoyer sur ce sujet.

Nous avons reçu et nous signalons à l'attention de nos lecteurs les ouvrages suivants :

Géométrie générale, par D.-Z. GARCIA DE GALDEANO, professeur de Géométrie analytique à l'Université de Saragosse.

Théorie des Quantités imaginaires, par D. ATANASIO LASALA Y MARTINEZ (Première partie : *les imaginaires dans le plan;* Bilbao, 1894).

Géométrie descriptive élémentaire et ses applications (1er volume, Paraisa et Cie, éditeurs ; prix 2 fr. 75), par le Dr S. ORTU CARBONI.

Cours de Géométrie descriptive (à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne), par M. Ch. BRISSE (Librairie Gauthier-Villars, 1895).

On nous prie d'annoncer aux lecteurs du *Journal* l'apparition d'une nouvelle Revue portant le nom de l'**Étranger**. Cette revue est INTERNATIONALE, *politique*, *littéraire*, *scientifique* et *artistique*. Elle nous paraît répondre a un besoin auquel on n'a pas suffisamment songé jusqu'ici, le besoin de connaître ce qui se dit de nous à l'étranger et de savoir ce qu'on y fait, ce qu'on y pense. Voici d'ailleurs quelques lignes, extraites du programme que s'est tracé la rédaction de cette revue et qui fera connaître le but qu'elle se propose d'atteindre.

« Toute Nation qui voudrait aujourd'hui s'isoler des pays voisins, et vivre par elle-même, serait inévitablement condamnée à la déchéance et à la mort.

» Plus un peuple sera au courant de ce qui se passe chez les nations qui l'entourent, mieux il saura profiter de leur exemple, tirer parti de leurs sages réformes, éviter leurs erreurs, plus ce peuple sera grand et fort.

» Être utile à notre pays par la comparaison constante de ce qui se fait à l'étranger avec ce qui se passe chez nous ; hâter l'œuvre de la civilisation par la recherche et l'étude des progrès réalisés autour de nous ; mettre ainsi toutes nos forces au service de la France, au service de l'humanité entière : tel est le but que se propose notre Revue. »

L'Étranger paraît tous les mois (à dater du 1er décembre 1894). Les abonnements (6 fr. pour la France ; 7 fr. pour les pays de l'Union postale), doivent être demandés à M. Lombard, 77, rue Denfert-Rochereau.

Comme tous les ans à pareille époque, l'**Annuaire du Bureau des Longitudes** vient de paraître. L'Annaire pour 1895 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : *Les Ondes atmosphériques lunaires;* par M. BOUQUET DE LA GRYE. — *Sur le Congrès géodésique d'Insprück;* par M. F. TISSERAND. — *L'observatoire du mont Blanc;* par M. J. JANSSEN. — *La Photométrie photographique;* par M. J. JANSSEN. — *Rapport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil;* par M. H. POINCARÉ. In-18 de IV-826 pages, avec deux cartes magnétiques. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 1 fr. 50 c. ; franco, 1 fr. 85.)

BACCALAURÉATS

Académie de Besançon.

I. — Entre quelles valeurs de x le quotient $y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}$ peut-il prendre des valeurs supérieures à 1? Entre ces valeurs de x, quelle est la plus petite valeur que ce quotient puisse prendre? — Représenter la marche de la fonction.

II. — *Questions à choisir : (a)* Mener les tangentes à l'ellipse par un point de son plan; *(b)* La sous-normale en un point quelconque d'une parabole a une longueur constante; *(c)* Définition de l'hélice. Propriété de la tangente.

2° *Problème.* — Ranger, par ordre de grandeur croissante, les racines a, b, de l'équation

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

et les racines c et d de l'équation

$$x^2 + mx - 1 = 0,$$

m étant un nombre donné positif.

III. — 1° Volume du tronc de pyramide à bases triangulaires et parallèles.

2° Discuter la fraction $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ et construire la courbe correspondante.

Académie de Bordeaux.

1° *Problème.* — On donne deux circonférences O, O′, de rayons respectifs R et r, la circonférence O′ passant par le centre O de la première. Mener à la circonférence O′ une tangente NMN′, telle que la somme des carrés des segments MN, MN′, interceptés à partir du point de contact sur cette tangente par la circonférence O, soit égale à une quantité donnée K^2. On cherchera l'angle y que fait alors le rayon O′M allant au point de contact avec la ligne des centres OO′. — Conditions de possibilité.

2° *Questions à choisir : (a)* Volume du segment sphérique; *(b)* Limite de la somme des dièdres d'un angle trièdre; *(c)* Deux polyèdres symétriques sont équivalents.

Académie de Caen.

Questions à choisir : (a) Faire et expliquer l'épure propre à déterminer l'angle d'un plan quelconque défini par ses traces avec le plan bissecteur du dièdre formé par les plans de projection.

(b) Déterminer les valeurs du paramètre m pour lesquelles les quatre racines de l'équation

$$x^4 + (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

forment une progression arithmétique.

(c) Montrer que tout déplacement d'une figure plane dans son plan peut être obtenu à l'aide d'une rotation ou une translation, suivant les cas.

Académie de Clermont.

1° Composition d'un système quelconque de forces appliquées à un corps solide.

2° *Problème.* — On donne un triangle isoscèle ABC; l'angle au sommet A vaut 120°, les côtés AB, AC sont égaux à a. Trouver sur les perpendiculaires menées en B et C au plan de ce triangle deux points P et Q, tels que APQ soit rectangle en A et que le volume ABCPQ ait une valeur donnée. — Discussion.

Académie de Dijon.

I. — Construire les traces d'un plan, sachant qu'elles sont respectivement parallèles à des droites données sur l'épure et connaissant, après son rabattement sur le plan horizontal, le rabattement d'un point du plan cherché dont la cote est donnée.

II. — Calculer les angles d'un triangle rectangle, connaissant l'angle aigu sous lequel se coupent les médianes issues des sommets des angles aigus. Dire la condition de possibilité du problème et la forme du triangle dans le cas extrême où elle est satisfaite.

III. — Calculer les coefficients p, q et les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0,$$

sachant que les racines, augmentées de l'unité, chacune, deviennent celles de l'équation

$$x^2 - px + pq = 0.$$

IV. — Minimum de l'expression

$$\sqrt{x^2 + 4 - 2x} + \sqrt{x^2 + q - 3x}$$

et valeur de x pour laquelle cette expression est minimum.

V. — 1° Volume du segment sphérique. Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. Volume du tronc de prisme triangulaire.

2° *Problème.* Dans un triangle ABC, on joint le sommet A à un point quelconque M du côté opposé BC, puis, par ses autres sommets B, C, on mène à la droite MA des parallèles rencontrant CA et BA prolongés aux points N et P. Prouver que l'on a toujours

$$\frac{1}{MA} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}.$$

Comment cette relation doit être modifiée lorsque le point M est pris sur le prolongement du côté BC ?

VI. — 1° Réduction des forces appliquées à un corps solide, à une force et à un couple.

2° *Problème.* — Une droite est située dans le plan vertical de projection et fait un angle α avec la ligne de terre, un plan passe par la ligne de terre et fait un angle β avec le plan horizontal; calculer l'angle de la droite et du plan.

VII. — 1° Équilibre d'un corps pesant placé sur un plan incliné.

2° *Problème.* — Par les sommets BC des angles aigus d'un triangle rectangle ABC, on mène deux droites mutuellement parallèles qui rencontrent en MN respectivement les prolongements des côtés de l'angle droit CA, BA, et on demande comment il faut diriger ces parallèles pour que la somme des aires des triangles BAM, CAN, soit un minimum.

VIII. — Calculer le rayon d'une circonférence tangente à deux circonférences données de rayon R et R′, et à la droite qui joint leurs centres. — On désignera par d la distance des centres.

QUESTION 515

Solution par M. ALETROP.

Résoudre le système d'équations

$$\frac{1}{by} + \frac{1}{cz} = \frac{a + x}{ax(a - x)},$$
$$\frac{1}{cz} + \frac{1}{ax} = \frac{b + y}{by(b - y)},$$
$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} = \frac{c + z}{cz(c - z)}.$$

(E. Lemoine.)

On trouve aisément

(1) $$x(a - x) = y(b - y) = z(c - z) = \lambda,$$

(en représentant par λ ces produits égaux) et

(2) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Or, si nous désignons par a, b, c les longueurs de trois céviennes (*) d'un triangle, les segments déterminés sur elles par leur point de concours et les bases du triangle, satisfont à l'équation (2) (théorème de Gergonne); et alors, pour qu'ils satisfassent aussi aux équations (1), il faut que lesdites céviennes soient les hauteurs du triangle considéré.

Nous écrirons, pour prendre les dénominations habituelles,

$$a = h_a, \quad b = h_b, \quad c = h_c;$$

x, y, z sont les distances de l'orthocentre aux trois côtés du triangle ABC qui a pour hauteurs h_a, h_b, h^c.

Si a, b, c désignent les côtés de ce triangle et R le rayon du cercle circonscrit, on a, par conséquent

$$x = 2R \cos B \cos C.$$

Mais

$$h_a = 2R(\cos A + \cos B \cos C) = 2R \sin B \sin C$$
$$= 8R \sin\frac{B}{2} \cos\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{C}{2},$$

d'où $$x = \frac{h_a \cos B \cos C}{4 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}.$$

(*) Les céviennes d'un triangle sont les droites qui joignent un point de son plan aux trois sommets.

Or, de la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, on tire

$$\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} = \frac{2}{h_b h_c} \cos A,$$

d'où l'on déduit

$$\cos A = \frac{\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_a^2}}{\frac{2}{h_b h_c}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}{\frac{1}{h_b h_c}}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h^a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)}{\frac{1}{h_b h_c}}}$$

d'où enfin

$$x = h_a \frac{\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} - \frac{1}{h_c^2}\right)\left(\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_b^2}\right)}{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}$$

ou, avec les notations de l'énoncé,

$$x = a \frac{(b^2c^2 + a^2c^2 - a^2b^2)(b^2c^2 + a^2b^2 - a^2c^2)}{(bc+ca+ab)(ab+ac-bc)(bc+ba-ac)(cb+ca-ab)}.$$

On trouve de même y et z. Il est clair que notre hypothèse, que a, b, c soient les hauteurs d'un triangle, n'empêche pas cette solution d'être exacte, si a, b, c ne peuvent être les hauteurs d'un triangle.

Autrement (*). — Retranchons successivement la seconde des équations proposées de la première et la troisième de la seconde, il vient :

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{by} - \dfrac{1}{ax} = \dfrac{a+x}{ax(a-x)} - \dfrac{b+y}{by(b-y)} \\[2ex] \dfrac{1}{cz} - \dfrac{1}{by} = \dfrac{b+y}{by(b-y)} - \dfrac{c+z}{cz(c-z)}, \end{cases}$$

d'où

$$(4) \qquad x(a-x) = y(b-y) = z(c-z).$$

(*) Cette solution algébrique est de M. Davidoglou.

Faisant la somme des trois équations proposées, on a :

$$\frac{1}{ax}\left(2-\frac{a+x}{a-x}\right)+\frac{1}{by}\left(2-\frac{b+y}{b-y}\right)+\frac{1}{cz}\left(2-\frac{c+z}{c-z}\right)=0,$$

d'où $$\frac{a-3x}{ax(a-x)}+\frac{b-3y}{by(y-b)}+\frac{c-3z}{cz(c-z)}=0.$$

et ayant égard à (4)

$$(5)\qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Posons, pour simplicité :

$$\frac{x}{a}=\alpha;\quad \frac{y}{b}=\beta;\quad \frac{z}{c}=\gamma\quad \text{et}\quad K_1=\frac{b^2}{a^2};\ K_2=\frac{b^2}{c^2};$$

alors $$\alpha+\beta+\gamma=1$$

et $$a^2\alpha(1-\alpha)=b^2\beta(1-\beta)=c^2\gamma(1-\gamma),$$

d'où $$\frac{\alpha-\alpha^2}{\beta-\beta^2}=K_1;\quad \frac{\gamma-\gamma^2}{\beta-\beta^2}=K_2.$$

Alors

$$(6)\qquad K_1+K_2=\frac{\alpha+\gamma-(\alpha^2+\gamma^2)}{\beta(1-\beta)}=\frac{(1-\beta)-(1-\beta)^2+2\alpha\gamma}{\beta(1-\beta)}$$

et

$$(7)\qquad K_1-K_2=\frac{(\alpha-\gamma)[1-(\alpha+\gamma)]}{\beta(1-\beta)}=\frac{\alpha-\gamma}{1-\beta}.$$

L'équation (7), élevée au carré, devient :

$$(K_1-K_2)^2(1-\beta)^2=(1-\beta)^2-4\alpha\gamma;$$

d'où $$\alpha\gamma=\frac{(1-\beta)^2[1-(K_1-K_2)^2]}{4};$$

(6) devient alors :

$$2(K_1+K_2).\beta.(1-\beta)=2(1-\beta)-2(1-\beta)^2+(1-\beta)^2[1-(K_1-K_2)^2]$$

d'où écartant la solution $\beta=1$;

ce qui donne $y=b$,

on a pour β :

$$\beta=\frac{(K_1-K_2)^2-1}{1+(K_1-K_2)^2-2(K_1+K_2)}=\frac{\left[b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)-1\right]\left[b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)-1\right]}{1+b^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2-2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)}.$$

Donc $$y=b.\frac{\left[b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)-1\right]\left[b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)+1\right]}{1+b^4\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2-2b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$$

et de même

$$z = c \,.\, \frac{\left[c^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) - 1\right]\left[c^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + 1\right]}{1 + c^4\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 - 2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)},$$

$$x = a \,.\, \frac{\left[a^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) - 1\right]\left[a^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + 1\right]}{1 + a^4\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 - 2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)};$$

ce qui, tous calculs faits, donne la valeur précédemment trouvée.

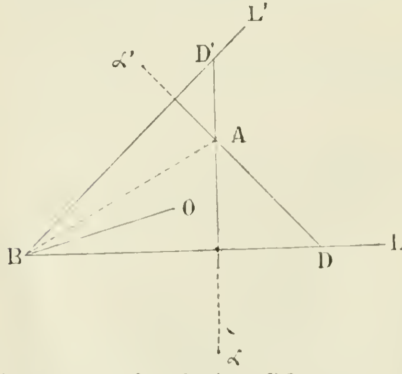
QUESTION 559

Solution par A. Droz Farny.

1° *On donne un point* A *et deux droites* L, L′ *qui se coupent en* B. *Les perpendiculaires abaissées de* A *sur* L, L′ *rencontrent respectivement ces droites en* D *et* D′. *Démontrer que les trois points* B, D, D′ *et les symétriques* α, α′ *de* A, *relativement à* L, L′ *sont sur une même circonférence.*

2° *Si,* L, L′ *restant fixes, le point* A *parcourt une certaine courbe, le centre* O *du cercle* BDD′αα′ *décrit une courbe symétriquement semblable.* (Bernès.)

On sait que dans tout triangle, les points symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés appartiennent à la circonférence circonscrite au triangle.



Or, dans le triangle BDD′, A est l'orthocentre, d'où la première partie.

Comme, dans un triangle, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont conjugués isogonaux, les droites BO et AB sont symétriques par rap-

port à la bissectrice de l'angle B ; on sait en outre que AB $= 2OB.\cos B$, ce qui démontre la seconde partie.

Nota. — Autre solution par M. Vazou, professeur au collège de Falaise, et Tzitzéica, élève à l'école normale de Bucharest. Ce dernier nous fait observer que la deuxième partie été déjà proposée sous une autre forme et résolue (*Journal* 1890, p. 215, q[n] 340).

QUESTION 563

Solution par M. G. Tzitzéica, à Bucarest.

La normale en un point M *quelconque d'une ellipse, de foyers* F, *et* F', *rencontre le grand axe en* P *et le petit axe en* Q.

Soient φ *et* φ' *les symétriques de* F *et* F' *par rapport à la normale.*

Montrer que les quadrilatères $PQ\varphi'F$ *et* $PQF'\varphi$ *sont inscriptibles à un cercle.* (E.-N. Barisien).

Les triangles $F'Q\varphi'$, $F'P\varphi'$ sont isoscèles.

Donc $\widehat{PF'Q} = \widehat{P\varphi'Q}.$

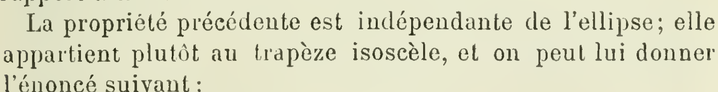
Le triangle FQF' étant de même isoscèle, on a

$$\widehat{F'FQ} = \widehat{FF'Q}.$$

Il en résulte

$$\widehat{F'FQ} = \widehat{P\varphi'Q},$$

ce qui justifie l'énoncé. L'autre quadrilatère est le symétrique du précédent par rapport à la normale.



La propriété précédente est indépendante de l'ellipse; elle appartient plutôt au trapèze isoscèle, et on peut lui donner l'énoncé suivant :

Les extrémités d'un côté non-parallèle d'un trapèze isoscèle, le point de concours des diagonales et le centre du cercle circonscrit sont quatre points d'un même cercle.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy; E. Foucart, élève au lycée Michelet; Antoine Davidoglou, élève au lycée Codreano, à Berlad.

QUESTIONS PROPOSÉES

600. — 1° Pour qu'une droite L soit l'axe de similitude (ou droite double) de deux polyèdres semblables P, P′, il faut et il suffit que toutes les arêtes homologues soient vues, à partir de L, sous des angles dièdres égaux, chacun à chacun.

Si on ne considérait pas tous les points de l'espace comme rattachés à P et P′, il pourrait y avoir exception : déduire l'exception de la démonstration générale.

2° Pour qu'un point soit le centre de similitude (ou point double) de deux polyèdres semblables, il faut et il suffit que, de ce point, on voie les arêtes homologues sous des angles égaux chacun à chacun.

3° On donne dans l'espace deux angles égaux xAy, $x'A'y'$; mener un plan qui, en coupant ces deux angles, détermine deux triangles directement semblables ayant des angles donnés et un rapport donné.

4° On donne les droites L, L′ situées d'une manière quelconque dans l'espace et les points A, A′ situés sur ces droites; mener un plan parallèle à un plan donné, ou bien passant par une droite donnée, qui coupe les deux droites en des points M, M′ tels que, si k est un rapport donné, on ait

$$\frac{A'M'}{AM} = k.$$

Cette dernière partie conduit à une solution géométrique de l'intersection d'une droite avec le paraboloïde hyperbolique.

(H. Dellac.)

601. — On donne dans l'espace un point O et une circonférence sur laquelle se trouvent les sommets A, B, C, D d'un quadrilatère convexe; démontrer que

$$AB.BD.AD.\overline{OC}^2 + BC.CD.BD.\overline{OA}^2 = AB.BC.AC.\overline{OD}^2 + AC.CD.AD.\overline{OB}^2.$$

On demande en outre des conséquences de cette propriété.

(Mannheim.)

Le Directeur-gérant,

G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25230-12-94.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT *(Suite)*

Par Mme Vve **F. Prime.**

II. — Sur la conversion des fractions ordinaires en décimales

A. — *Théorèmes fondamentaux.*

1. **Théorème I.** — *Si le nombre des décimales croît sans cesse, le nombre décimal tend vers une limite finie et déterminée.*

Soit le nombre décimal

$$E, a_1a_2a_3 \ldots$$

Si E' est un nombre entier supérieur à E, on a

$$E < E, a_1 < E, a_1a_2 < \ldots < E, a_1a_2 \ldots a_m < E'.$$

Il en résulte que, n croissant indéfiniment, la valeur du nombre décimal

$$E, a_1a_2 \ldots a_n$$

augmente indéfiniment, tout en restant toujours inférieure à E'. Donc...

2. *Définition.* — La limite trouvée s'appelle la valeur du nombre décimal et il résulte d'un théorème connu qu'on multiplie un nombre décimal par 10^m en avançant la virgule de m rangs vers la droite (lim. PX = P. lim. X).

3. **Théorème II.** — *La valeur d'un nombre décimal illimité est tout au plus égale à une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de son premier chiffre significatif de gauche.*

Soient $0{,}00 \ldots 01$ une unité du $n^{\text{ième}}$ ordre décimal et

$$0{,}00 \ldots 00a_1a_2 \ldots$$

un nombre décimal dont le premier chiffre significatif est au moins du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre.

On a, quel que soit m,

$$0{,}00 \ldots 01 > 0{,}00 \ldots 00a_1a_2 \ldots a_m,$$

et, aussi, $0{,}00 \ldots 01 \geqslant \text{lim. } 0{,}00 \ldots 00a_1a_2 \ldots$

4. **Théorème III.** — *Deux nombres décimaux égaux sont généralement identiques.*

1° *Les deux développements sont limités.* S'ils n'étaient pas identiques, le résultat de leur soustraction ne serait pas nul.

2° *Les deux développements sont illimités.* Soient V leur valeur commune et V_m, V'_m leurs valeurs limitées à la $m^{ième}$ décimale. On a

$$0 < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}, \quad \text{et} \quad 0 < V - V'_m \leqslant \frac{1}{10^m};$$

par suite,

$$V_m - V'_m = 0, \quad \text{ou} \quad \left| V_m - V'_m \right| < \frac{1}{10^m}.$$

Dans le premier cas, V_m est identique à V'_m (1°) et comme m est quelconque, les deux développements sont entièrement identiques.

Quant à la seconde hypothèse, elle doit être rejetée, puisque V_m et V'_m étant multiples de $\frac{1}{10^m}$, leur différence ne peut pas être inférieure à $\frac{1}{10^m}$.

3° *Un développement est limité, et l'autre illimité.* Vd. C. Th. III.

B. — *Conversion des fractions ordinaires en decimales.*

I. *Règle.* — Convertir en décimales la fraction ordinaire $\frac{p}{q}$, c'est chercher combien elle contient de dixièmes, de centièmes et ainsi de suite

Faisons les divisions

$$\begin{aligned} p &= q.E + r, \\ 10.r &= q.a_1 + r_1, \\ 10.r_1 &= q.a_2 + r_2, \\ 10.r_2 &= q.a_3 + r_3, \end{aligned}$$

il en résulte que $\frac{p}{r} = E, a_1a_2a_3 + \frac{r_3}{q.10^3}$

avec $\frac{r_3}{q.10^3} < \frac{1}{10^3}$.

On retrouve, ainsi, la règle connue.

2. **Théorème I.** — *Si,* $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$ *étant irréductible,* q *ne contient que les facteurs 2 et 5, la conversion se fait exactement et le nombre des décimales est égal au plus haut exposant des facteurs 2 et 5 dans* q.

Soit $q = 2^m . 5^n$, avec $m > n$; on a

$$\frac{p}{q} = \frac{p . 5^{m-n}}{10^m}.$$

quotient qui aura bien m chiffres décimaux; car, m étant plus grand que n, p est premier avec 2 et $p.5^{m-n}$ n'est pas multiple de 10.

3. **Théorème II.** — *Si* q *renferme d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 5, *la fraction irréductible* $\frac{p}{q}$ *ne se convertit pas exactement en décimales.*

Si on pouvait avoir $\frac{p}{q} = \frac{a}{10^m}$,

avec a entier, on aurait

$$a = \frac{p . 10^m}{q},$$

égalité impossible, q étant premier avec p et ne divisant pas 10^m.

4. **Théorème III.** — *Si le développement de* $\frac{p}{q}$ *en décimales est illimité, sa valeur est égale à* $\frac{p}{q}$.

Soient V_m la valeur du développement limité au m^e chiffre décimal et V, la limite de V_m.

On a $$0 < \frac{p}{q} - V_m < \frac{1}{10^m} \qquad (\text{n}^\circ\ 1)$$

et $$0 < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}, \qquad (\text{A. n}^\circ\ 3)$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° $V - \frac{p}{q} = 0$ et alors $V = \frac{p}{q}$. C. Q. F. D.

2° Ou bien $\left| V - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{10^m}$, mais comme m est aussi grand qu'on le veut, on a encore $V = \frac{p}{q}$.

5. **Théorème IV.** — *Si le développement est illimité, il est nécessairement périodique, simple ou mixte.*

6. **Théorème V.** — *Si* q *est premier avec* 10, $\frac{p}{q}$ *donne naissance à une fraction périodique simple.*

Soit m le nombre des chiffres de la période et supposons que la n^e chiffre décimal appartienne à la période. On a alors

$$p.10^{m+n} = Mq + r,$$

et

$$p.10^n = Mq + r,$$

d'où

$$10^n(p.10^m - p) = Mq.$$

Mais 10^n est premier avec q, donc

$$p.10^m - p = Mq,$$

et le premier reste qui se reproduit est celui qui correspond au dividende p.

7. **Théorème VI.** — *Si* q *est premier avec* 10 *et si* p *n'est pas un multiple de* 10, *la fraction irréductible* $\frac{p}{q}$ *est la génératrice d'une fraction périodique simple dont la période et la partie entière ne sont pas terminées par le même chiffre.*

Le développement est périodique simple (Th. I) et si la période a m chiffres, on a

$$p = Aq + r \quad \text{et} \quad p.10^m = A'.q + r,$$

d'où

$$p(10^m - 1) = (A' - A).q.$$

Si A' et A étaient terminés par le même chiffre, $A' - A$ serait divisible par 10, mais il est bien clair que 10 ne divise pas le premier membre de l'égalité.

8. **Theorème VII.** — *Si le dénominateur de la fraction irréductible* $\frac{p}{q}$, *sans être premier avec* 10, *contient d'autres facteurs premiers que* 2 *et* 5, *le développement est périodique mixte et le nombre des chiffres irréguliers (on ne compte pas la partie entière) est égal au plus haut exposant de* 2 *et* 5 *dans* q.

Soit $q = 2^m.5^n.q_1$ où q_1 est premier avec 10 et $m > n$. On a

$$\frac{p}{q} = \frac{p.5^{m-n}}{q_1} \cdot \frac{1}{10^m}.$$

D'après le théorème VI, la fraction $\frac{p.5^{m-n}}{q_1}$ donne naissance à une fraction périodique simple dont la période et la partie entière ne se terminent pas par le même chiffre. Or, on en déduit $\frac{p}{q}$ en déplaçant la virgule de m rangs vers la gauche; tous les chiffres introduits sont irréguliers.

9. **Théorème.** — Les réciproques des théorèmes précédents sont vraies; elles s'énoncent :

Lorsqu'une fraction décimale résulte de la conversion de la fraction ordinaire irréductible $\frac{p}{q}$ *en décimales :*

1° *Si la fraction est limitée,* q *ne contient que les facteurs* 2 *et* 5.

2° *Si la fraction est périodique simple,* q *est premier avec* 10.

3° *Si la fraction est périodique mixte,* q, *sans être premier avec* 10, *contient d'autres facteurs que* 2 *et* 5.

C. — *Conversion des fractions décimales périodiques en fractions ordinaires.*

1. **Théorème I.** — $\lim 0, abcabc\ldots = \frac{abc}{999}$.

2. **Théorème II.** — $\lim 0, abrstrst\ldots = \frac{abrst - ab}{99900}$.

3. **Théorème III.** — *Un développement limité peut être égal à un développement illimité si celui-ci est périodique et de période* 9.

Soient les deux nombres,

(1) $E, a_1a_2\ldots a_m$

(2) $E', b_1b_2\ldots b_mc_1c_2c_3\ldots$

Désignons, par V, leur valeur commune et posons

$$V_m = E', b_1b_2 \ldots b_m.$$

On a, à cause de (2),

(3) $$0 < V - V_m \leqslant \frac{1}{10^m}.$$

Remplaçant V par (1), on voit que l'hypothèse

$$V - V_m < \frac{1}{10^m},$$

est irréalisable. On doit donc avoir

$$V - V_m = \frac{1}{10_m},$$

ce qui montre que les deux développements (1) et (2) sont identiques jusqu'au $(m-1)^e$ chiffre décimal et que a_m surpasse b_m de une unité.

En remplaçant, dans (4), V par (2), on a

$$0,00\ldots 00c_1c_2c_3\ldots = \frac{1}{10^m};$$

mais, d'après le théorème II,

$$0,00\ldots 00999\ldots = \frac{1}{10^m}.$$

Donc (A, Th. III) $c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = 9$.

C. Q. F. D.

4. **Corollaire.** — La valeur d'une fraction décimale périodique se confond avec la génératrice, lorsque la période n'est pas 9.

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par M. **Maurice Fouché**, professeur à Sainte-Barbe.

Le *Journal de Mathématiques élémentaires* s'est occupé à plusieurs reprises de la question des caractères de divisibilité; mais la plupart des articles publiés à ce sujet ne présentent pas le degré de généralité que comporte la question, si ce n'est celui qui a paru sans signature dans le numéro de mars 1894, et qui résout le problème d'une manière absolument nouvelle. On se trouve donc actuellement en présence de deux méthodes : l'ancienne, fondée sur la considération des résidus des puissances successives de 10 par rapport au diviseur, qui conduit à multiplier les chiffres du nombre proposé par ces résidus, et la nouvelle reposant sur la possibilité de mettre un certain multiple de 10 sous la forme $nd \pm 1$, et conduisant à diviser le nombre des dizaines par un nombre convenable. Cette dernière est certainement préférable, pourvu que le diviseur par lequel il faut diviser les dizaines ne soit pas trop grand, attendu qu'elle amène assez vite, par des opérations uniformes, la réduction du nombre proposé à un nombre très petit. Cependant, il ne semble pas que l'on ait tiré tout le parti désirable de la méthode des résidus. Le *Journal de Mathématiques* signale un article sur le même sujet de la *Revue*

mensuelle de la Société des Sciences de Guatémala qui paraît reposersur la méthode des résidus; mais l'exemple qu'il donne de la divisibilité par 19 montre que, là aussi, on n'a pas apporté toute la simplification possible.

Je crois qu'on arrivera aux caractères présentant le maximum de simplicité en combinant convenablement les deux méthodes. Il est bien clair qu'il ne s'agit pas seulement de reconnaître si la division laisse ou ne laisse pas de reste; mais qu'il faut aussi donner une règle pour calculer ce reste avec le moins de calculs possible; il est clair aussi que la question présente surtout de l'intérêt quand le nombre donné est très grand. Dans ces conditions, on emploiera la méthode des résidus pour réduire, par des additions, des soustractions, ou des multiplications très simples, le nombre proposé à n'avoir qu'un nombre limité de chiffres, lequel dépendra du diviseur, et on appliquera la méthode indiquée dans l'article de mars 1894 sur le nombre ainsi réduit.

Je ne m'occuperai que des nombres écrits dans le système de numération décimale, la généralisation pour un système quelconque de numération ne présentant aucune difficulté. Je considérerai deux cas, suivant que le diviseur donné est premier ou non avec 10; mais je laisserai de côté les diviseurs de la forme $2^\alpha 5^\beta$, la question en ce qui les concerne étant extrêmement simple.

Le point de départ de la théorie est le théorème d'Euler, d'après lequel si λ désigne le nombre des nombres premiers avec d et plus petit que lui, et a un nombre premier avec d, $a^\lambda - 1$ est un multiple de d. Je rappellerai aussi quelques remarques bien connues.

Soit a^p la première puissance de a qui donne le résidu 1 par rapport à d. Si $p = \lambda$, les puissances successives de a donnent tous les résidus possibles c'est-à-dire tous les nombres premiers avec d et plus petits que lui, parmi lesquels figure le résidu $d - 1$ ou -1. De plus, la puissance de a qui donnera ce résidu sera $a^{\frac{\lambda}{2}}$; car si a^k donne le résidu -1, il faudra que a^{2k} donne le résidu $+1$.

Si p est plus petit que λ, il sera un diviseur de λ et il pourra

arriver que $a^{\frac{p}{2}}$ donne le résidu -1, mais cela n'est pas sûr.

Dans tous les cas, il existe une puissance de a dont l'exposant est au plus égal à $\frac{\lambda}{2}$ qui donne le résidu ± 1.

Théorème. — *Pour calculer le résidu d'un nombre par rapport à un diviseur* d *premier avec* 10, *on peut, par une seule addition, ou par une addition et une soustraction, réduire le nombre donné à avoir au plus $\frac{\lambda}{2}$ chiffres, λ désignant le nombre des nombres premiers avec* d *et plus petits que lui.*

En effet, il existe une puissance de 10, 10^p qui donne le résidu 1. Il en sera de même de 10^{kp} et tout nombre de la forme de $A 10^{kp}$ sera congru avec A.

Donc, on *partagera le nombre en tranches de* p *chiffres, et on ajoutera les tranches; on réitérera l'opération jusqu'à ce que le nombre ait au plus* p *chiffres.*

Si p est impair, ou si $10^{\frac{p}{2}}$ ne donne pas le résidu -1, la réduction sera terminée; mais on aura $p \leqslant \frac{\lambda}{2}$ d'après la remarque précédente.

Si $10^{\frac{p}{2}}$ donne le résidu -1, $A \times 10^{\frac{p}{2}}$ sera congru avec -1. Donc : *on partagera le nombre déjà réduit par la règle précédente en deux tranches de $\frac{p}{2}$ chiffres et l'on retranchera la tranche de gauche de celle de droite.*

Cette manière d'opérer en deux fois nous paraît plus rapide que la méthode employée souvent, qui consisterait à partager tout d'abord le nombre en tranches de $\frac{p}{2}$ chiffres, et à calculer l'excès de la somme des tranches de rang impair sur celle des tranches de rang pair. Il est clair que les deux règles conduisent au même résultat. Enfin, on sait que si la soustraction est impossible, on la rend possible en ajoutant au premier nombre ou en retranchant du second un multiple convenable du diviseur.

Dans certains cas, on peut pousser la réduction plus loin ;

mais alors les règles présentent quelque chose d'arbitraire. Supposons que 10^k donne le résidu α. Alors, $A.10^k$ sera congru avec αA, et l'*on pourra séparer* k *chiffres à droite du nombre, multiplier la partie qui est à gauche de la séparation par* α, *et ajouter le résultat à la partie qui est à droite.* L'application répétée de cette règle réduira le nombre des chiffres à k. Il importe, pour la rapidité du calcul, de choisir un résidu α qui soit assez petit, et un nombre k voisin de la moitié du nombre des chiffres. On pourra ensuite recommencer avec un nombre $k' < k$, et un autre résidu α' et ainsi de suite, jusqu'à ce que le nombre soit assez réduit pour qu'on trouve plus avantageux d'appliquer la règle résultant de la méthode indiquée dans le numéro de mars.

On sait que le calcul des résidus des puissances successives de 10 se fait en divisant par d l'unité suivie d'un nombre indéfini de zéros; mais il convient de remarquer qu'il suffit de s'arrêter dès qu'on a trouvé le reste $d - 1$ qui correspond au résidu -1, ou le reste 1.

Comme exemple, considérons le diviseur 19. La division D (*Journal*, 1894, p. 76), qu'il conviendrait d'arrêter au reste 18, donne:

$$10^2 = m.19 + 5,$$
$$10^5 = m.19 + 3,$$
$$10^9 = m.19 - 1,$$

d'où
$$10^{18} = m.19 + 1.$$

On partagera donc le nombre en tranches de 18 chiffres et on ajoutera les tranches; puis on partagera le nombre restant en tranches de 9 chiffres et on retranchera la tranche de gauche de celle de droite. Dans le nombre de 9 chiffres ainsi formé, on séparera 5 chiffres à droite; on multipliera la partie de gauche par 3 et on l'ajoutera à la partie de droite. Dans le nombre de 4 chiffres ainsi trouvé, on multipliera les centaines par 5 pour ajouter le produit au nombre formé, par les dizaines et les unités. Enfin, le nombre n'ayant que 2 chiffres, on ajoutera aux unités la moitié du chiffre des dizaines (p. 57).

Voici la disposition du calcul sur l'exemple de la page 77.

Je prends de suite le nombre réduit à 9 chiffres

$$\begin{array}{rr}
 & 4348 \mid 260\,20 \\
4348 \times 3 = & 130\,44 \\
 & 390 \mid 64 \\
390 \times 5 = & 19 \mid 50 \\
 & 1 \mid 14 \\
1 \times 5 = & 5 \\
 & 19
\end{array}$$

A la quatrième ligne, on a supprimé les 19 centaines qui sont un multiple de 19. Le nombre est multiple de 19.

Prenons encore comme exemple le diviseur 43. Il suffira de calculer au plus 21 chiffres dans la division, mais on peut encore abréger, dès qu'on trouve un petit reste

$$\begin{array}{l|l}
100 & 43 \\
\ \ 140 & 0,0232558 \\
\ \ \ \ 110 & \\
\ \ \ \ \ \ 240 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 250 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 350 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 6 &
\end{array}$$

Nous avons $10^7 = m.43 + 6$

d'où $10^{14} = m.43 + 36 = m.43 - 7$

et $10^{21} = m.43 - 42 = m.43 + 1.$

Du reste, 10^{21} est la première puissance de 10 qui donne le résidu 1, car les puissances précédentes ne pourraient être que 10^3 ou 10^7 qui donnent les résidus 11 et 6.

On remarquera aussi que

$$10^9 = m.43 + 6.14 = m.43 + 84 = m.43 + 41 = m.43 - 2.$$

Je retiens seulement les résultats suivants

$$10^3 = m.43 + 11$$

$$10^9 = m.43 - 2$$

et $$10^{21} = m.43 + 1.$$

La dernière égalité montre qu'il faut partager le nombre en tranches de 21 chiffres et ajouter les tranches. Ensuite je séparerai 9 chiffres à droite et je retrancherai de la tranche de droite le double de celle de gauche. Je séparerai ensuite

3 chiffres et j'ajouterai à la tranche de droite 11 fois celle de gauche. Le nombre n'ayant que 3 chiffres, j'observe que $130 = m.43 + 1$, ce qui conduit à ajouter aux unités le quotient des dizaines par 13. Voici la disposition des calculs pour un nombre réduit à 21 chiffres.

A			
358 924 642	894	625 432 815	+
$A \times 2 =$	717	849 285 788	−
$717 \times 2 =$		1 434	+
$43 \times 10^7 =$		43	
	206 148	461	
$206\ 148 \times 11 =$	206	148	
	2061	48	
	2268	089	
$2268 \times 11 =$	2	268	
	22	68	
	25	037	
$25 \times 11 =$		25	
		25	
		312	

Le nombre réduit à 3 chiffres est 312 :

$31 = 13 \times 2$	$+\ 5$
$312 = m.43$	$+\ 2$
	$+\ 50$
	$+\ 2$
	54
	$-\ 43$
	11

Le reste de la division du nombre proposé par 43 est 11.

(A suivre.)

PROBLÈME DU BILLARD CIRCULAIRE

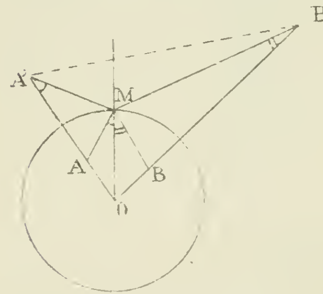
Par **G. Tarry**.

Quelle route doit suivre une bille A *pour rencontrer une autre bille* B, *après avoir touché la bande d'un billard circulaire* O ?

Il s'agit de trouver, sur la circonférence, un point M tel que l'angle AMO soit égal à l'angle OMB.

Soient A′ et B′ *les réciproques* (*) de A et B par rapport à la circonférence.

Les angles OA′M et MB′O sont égaux, comme étant respectivement égaux aux angles AMO et OMB. Par suite, le lieu des points M est une hyperbole équilatère passant par le point O et dont le centre est au milieu de A′B′.



Les positions du point M seront les points d'intersection de cette hyperbole avec la circonférence donnée; il y aura quatre, trois ou deux solutions selon la position de la circonférence par rapport à la branche de l'hyperbole qui ne passe pas par son centre.

On doit remarquer que les solutions trouvées ne satisfont qu'à la condition suivante : La bille A est réfléchie par la bande circulaire suivant une droite qui passe par l'autre bille B ; la bille ne pourrait donc pas toujours suivre matériellement le chemin qui lui est tracé, ainsi que l'a remarqué M. Auric (*N. A.* 1894, p. 218).

Mais si l'on admet qu'après sa réflexion la bille A peut

(*) J'ai appelé point réciproque (inverse paraît, je crois, plus exact) de A, par rapport à une circonférence, le point A′ inverse de A, en prenant pour *origine* le *centre* du cercle, et pour *puissance* le carré du rayon du cercle.

Ainsi $$OA.OA' = OB.OB' = \overline{OM}^2.$$

parcourir sa trajectoire rectiligne suivant l'une ou l'autre de ses deux directions, les solutions trouvées satisferont toujours à la question.

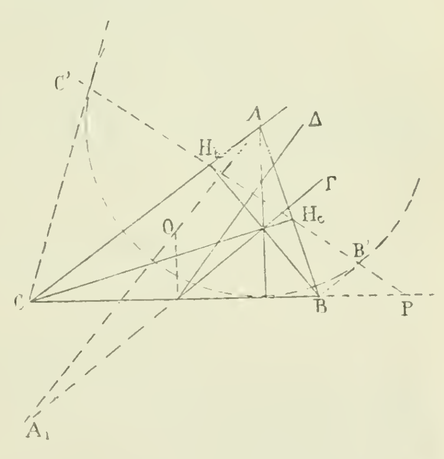
NOTE SUR LA QUESTION 549 (*)

Par M. **Dhavernas.**

Rappelons d'abord l'énoncé de cette question :

Si, de l'orthocentre d'un triangle, on abaisse des perpendiculaires sur les bissectrices de l'angle A, *la droite qui joint leurs pieds passe par le milieu de* BC.

Soient Δ cette droite et Γ la droite joignant l'orthocentre au milieu de BC; la médiatrice correspondante à BC est parallèle à la hauteur AH_a; elle est donc conjuguée harmonique de la médiane et des droites Δ et Γ. Comme d'ailleurs Δ passe par le centre du cercle des neuf points, on vérifie ainsi la propriété bien connue que, sur la droite d'Euler, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points et l'orthocentre forment une division harmonique. La droite AO est parallèle à Δ;



elle est donc divisée par les autres rayons du faisceau harmonique en deux parties égales; la droite Γ coupe alors le cercle circonscrit au point diamétralement opposé à A. Menons BB', CC' tangentes au cercle qui a A pour centre et AH_a

(*) La question 549, identique à la question 536, a été résolue (V. *Journal*, 1894, p. 215).

pour rayon ; $B'C'$ coupe BC en P ; la droite Γ est perpendiculaire sur AP ; on voit en effet, en vertu d'un théorème énoncé dans le *Journal* (1893, p. 173), que $B'C'$ passe par les pieds H_b, H_c des hauteurs. Dans le quadrilatère BCH_bH_c inscriptible, complété en A et P, la droite AP est alors la polaire de l'orthocentre ; d'où il résulte que la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre en Q sur AP passe par le centre du cercle BCH_bH_c, autrement dit par le milieu de BC.

On peut remarquer en outre que si D est le pied de la bissectrice intérieure de l'angle A, les cercles BH_bD, CH_bD, PQD se coupent au point qui est la projection de l'orthocentre sur AD.

Le droite Γ jouit peut-être d'autres remarquables propriétés ; il serait sans doute intéressant de les étudier.

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin**

---

364. — *On considère la suite récurrente*

$$u_0,\ u_1, u_2,\ u_3\ \ldots$$

dans laquelle $\qquad u_n = pu_{n-1} + u_{n-2}.$

Démontrer la formule

$$u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{u_{n+1}u_n - u_1u_0}{p}.$$

En général, si la loi de récurrence correspond à la formule

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2},$$

on a

$$(q+1)(p+q-1)(p-q+1)\Sigma_0^n u_2^n$$
$$= 2pq(u_{n+1}u_n + pu_0 - u_1u_0)$$
$$+ (1-q)\left[u_{n+1}^2 + (p^2-1)u_0 - u_1^2 + q^2u_n\right]$$

Cette formule est en défaut quand un des trois facteurs du premier membre s'annule ; en particulier pour $q = -1$, on trouve directement dans ce cas, la formule

$$(p^2-4)\Sigma_0^n u_n^2 = pu_{n+1}u_n - 2u_n^2 + pu_1u_0(2n-1) - 2nu_1^2 + (p^2-2n-2)u_0^2.$$

Cette formule, si $u_0 = 0$, $u_0 = 1$, (cas qui se rencontrent fréquemment) est susceptible de la forme particulièrement simple

$$\Sigma_0^n u_n^2 = \frac{u_{2n+1} - u_{2n-1}}{p^2-4}.$$

365. — *Un triangulaire n'est jamais la somme de deux ou trois carrés consécutifs.*

366. — *La somme des carrés de deux triangulaires consécutifs est un triangulaire.*

367. — *Si les côtés d'un triangle rectangle sont des nombres entiers, le rayon du cercle inscrit, et les rayons de chacun des trois cercles ex-inscrits sont également des nombres entiers.*

368. — *Si les côtés d'un triangle sont donnés par les formules suivantes, où* p *et* q *désignent des entiers positifs de même parité;*

$$a = \frac{1}{2}(q^2 + 9p^2),$$

$$b = q^2 + 3p^2,$$

$$c = \frac{3}{2}(q^2 + p^2),$$

vérifier les propriétés suivantes :

Les côtés sont des nombres entiers en progression arithmétique. les hauteurs et la surface sont également des nombres entiers

$$2S = 3pq(q^2 + 3p^2).$$

Le rayon du cercle inscrit est un nombre entier

$$r = pq.$$

Le rayon du cercle exinscrit tangent au côté moyen est également un nombre entier, triple du précédent

$$r_b = 3pq.$$

BACCALAURÉATS

Académie de Grenoble.

I. Enoncer les théorèmes relatifs aux limites entre lesquelles est toujours comprise la somme des faces d'un angle polyèdre convexe. En déduire les limites entre lesquelles est toujours comprise la somme des dièdres d'un angle trièdre.

II. Dans un triangle isoscèle ABC, on connaît la hauteur h et la médiane m relatives à un des côtés égaux du triangle. Calculer les angles et les côtes de ce triangle.

1° *Questions à chosir : (a)* Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles; *(b)* centre des forces parallèles; *(c)* centre de gravité.

2° On donne un cercle O de rayon R, et une tangente AT en un point A du cercle. On mène un rayon OB faisant un angle α avec OA et rencontrant en B la tangente AT. En B, on mène la perpendiculaire BC à OB jusqu'à sa rencontre en C avec OA. Sur OC comme diamètre.

on décrit un cercle. On demande : *(a)* la longueur de la corde DD′ commune aux deux cercles; *(b)* de déterminer α de façon que cette corde soit égale à la corde BB′ détachée par le cercle sur les tangentes.

On donne les traces d'un plan et les projections horizontales de trois points situés dans ce plan. On demande de déterminer les projections du centre du cercle qui passe par ces trois points.

Académie de Lille.

1° *Questions à choisir :* *(a)* Parmi toutes les droites que l'on peut mener dans un plan par le pied d'une droite oblique à ce plan, déterminer : 1° celle qui fait avec l'oblique le plus petit angle; 2° celle qui fait avec l'oblique un angle droit.

(b) Indiquer, sans démonstration, la construction de la tangente à l'ellipse par un point extérieur. Appliquer cette construction au cas où l'ellipse devient une circonférence, et, dans ce cas, la justifier directement,

(c) Surface latérale du tronc de cône à bases parallèles.

2° *Problème :* Deux points A et B étant situés sur un même diamètre d'une circonférence de rayon R, à des distances a et b du centre, on suppose qu'un point M se déplace sur la circonference, et on demande comment varie l'angle AMB sous lequel la droite AB est vue du point M. — On distinguera les trois cas où les points A et B sont tous deux à l'intérieur du cercle, ou bien tous deux à l'extérieur, ou bien l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur.

Académie de Lyon.

Questions à choisir : *(a)* Démontrer les formules qui permettent de calculer les angles et la surface d'un triangle dont on connaît les trois côtés. Conditions de possibilité; *(b)* Dans un triangle, on connaît les côtés a et b ainsi que l'angle A. Trouver le côté c ainsi que les angles B et C et la surface S. Examiner les différents cas qui peuvent se présenter et les discuter; *(c)* Trois points A, B, C, étant situés sur un terrain uni et rapportés sur une carte, déterminer sur cette carte le point M d'où les distances AB, AC sont vues sous des angles donnés p et q. Cas où le problème est indeterminé. Condition pour que le quadrilatère MABC soit inscriptible.

2° *Problème.* — Dans un angle obliquangle, on donne :

$$A = 27°47'77'', \qquad a = 2199^m,12, \qquad b = 2513^m,28.$$

On demande à calculer les différents systèmes de valeurs de c, B, C et la surface S qui conviennent à ces données.

Académie de Montpellier.

Un cône droit, à base circulaire, est supposé prolongé au delà de la base. Une sphère S passe par la circonférence de base et par le sommet du cône. On considère le volume V limité par la surface latérale du cône, et par la zone de la sphère S comprise à l'intérieur de la surface conique prolongée. On demande de calculer le rayon de la base du cône, sa hauteur et le rayon de la sphère, sachant que le volume V est équivalent à celui d'une sphère donnée de rayon a, et que la surface de la zone qui limite ce volume est équivalente à la surface d'une autre sphère donnée de rayon b. Discuter le problème.

QUESTION 556

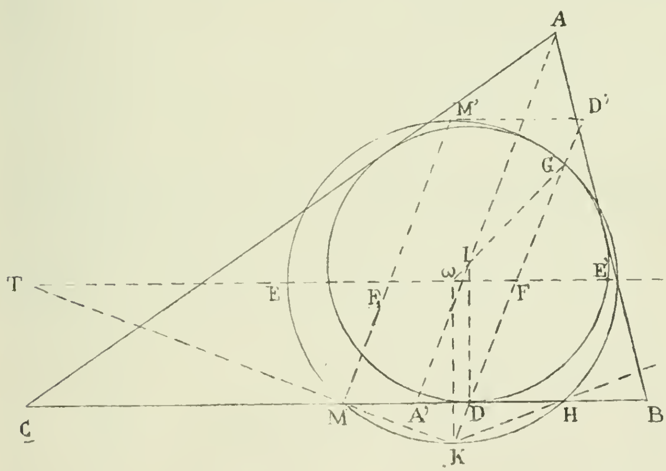
Solution par M. DAVIDOGLOU.

Dans un triangle ABC, *on donne le cercle des neuf points (centre et rayon), le point de contact* G *de ce cercle et du cercle inscrit, ainsi que la direction du côté* BC :

1° Lieu du point de contact D *de* BC *et du cercle inscrit ;*

2° Construire le triangle en supposant que l'on donne aussi $b - c$: *ou bien le rapport* $\frac{DH}{DM}$, *où* H *est le pied de la hauteur issue de* A *et* M *le milieu de* BC. (Bernès.)

Soient ω le centre du cercle donné ; ωK le rayon perpendiculaire à la direction donnée BC. Tirons GK. Comme cette



droite contient évidemment les points D du contact des cercles inscrits, elle représente le lieu cherché.

2°, α). Soit M le milieu du côté BC $= a$; on a :

$$MD = \frac{a}{2} = DB = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2}.$$

De là cette construction :

Par le point ω, on mène le diamètre EE′ perpendiculaire à ωK et qui coupe GK en F ; on prend de part et

d'autre de ce point $FF_1 = FF_2 = \frac{b-c}{2}$ (F_2 de même côté que F par rapport à ω).

Prenons le point F_1 ; par ce point, on mène une parallèle à GK qui coupe le cercle ω aux points M et M' (M' de même côté que K par rapport au diamètre EE'); les perpendiculaires abaissées de ces points sur ωK coupent GK aux points de contact D et D' des deux cercles. Or, le point D' ne convient pas, car sa distance au diamètre EE' est plus grande que la distance du point G au même diamètre et par suite se trouve sur le prolongement de KG. Donc pour le point F_1, on n'a qu'un seul point de contact.

Pour le point F_2, par une construction analogue, on voit que les points D_1 et D_2 sont acceptables.

Soient H, H_1, H_2 les points où MD, M_1D_1, M_2D_2 coupent le cercle des neuf points.

Sur MD, M_1D_1, M_2D_2 on prend respectivement des points A', A'', A''' tels que :

$\overline{MD}^2 = MH.MA'$; $\overline{M_1D_1}^2 = M_1H_1.M_1A''$; $\overline{M_2D_2}^2 = M_2H_2.M_2A'''$.

Soient I, I_1, I_2 les centres des cercles tangents respectivement en G et D, G et D_1, G et D_2 à la perpendiculaire, en G, au rayon Gω et aux droites MD, M_1D_1, M_2D_2.

Les droites IA', I_1A'', I_2A''' coupent respectivement en A, A_1, A_2 les perpendiculaires élevées en H, H_1, H_2 aux droites MD, M_1D_1, M_2D_2.

Il ne reste plus qu'à mener des points A, A_1, A_2 des tangentes aux cercles I, I_1, I_2.

Pour que les trois solutions existent, il faut que

$$FF_2 < \frac{R}{2} - OF.$$

Posons $$OF = \delta,$$

et comme $$FF_2 = \frac{b-c}{2},$$

cette condition s'écrit $b - c < R - 2\delta$.

Pour qu'on ait une seule solution, on doit avoir

$$FF_1 - \frac{R}{2} + \delta \quad \text{ou} \quad R - 2\delta < b - c < R + 2\delta.$$

2°, β). Les droites KM et KH coupent EE′ en T et T_2 ; on a

$$\frac{TF}{T_1F} = \frac{T\omega + \delta}{T\omega - \delta} = \frac{MD}{MH} = K \text{ (une quantité donnée).}$$

d'où
$$T\omega = \delta.\frac{K + 1}{K - 1}.$$

La construction s'achève facilement, comme dans le premier cas.

QUESTION 562

Solution par M. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

On donne un cercle et un carré qui lui est circonscrit, dont les côtés opposés sont A *et* A′, B *et* B′. *On joint le point de contact de* A *aux points où les côtés* B *et* B′ *sont rencontrés par une tangente arbitraire* T *à la circonférence. Démontrer que ces droites interceptent sur* A′ *un segment égal au côté du carré.*

(Mannheim.)

Soient : ABCD le carré circonscrit au cercle O; A′, B′ C′, D′ les points de contact; EFE′ la tangente arbitraire et enfin GG′ le segment intercepté sur CD par les droites A′E et A′E′. Il s'agit de démontrer que $CD = GG'$, ou que $CG = DG'$.

Des triangles semblables donnent :

$$(1) \qquad \frac{CG}{AA'} = \frac{CE}{2AA' + CE};$$

$$(2) \qquad \frac{DG'}{AA'} = \frac{DE'}{2AA' - DE'}.$$

L'angle $\widehat{EOE'}$ étant droit, on a :

$$\overline{OF}^2 = \overline{AA'}^2 = EC'.BE'$$
$$= [AA' + CE]\,[AA' - DE'];$$

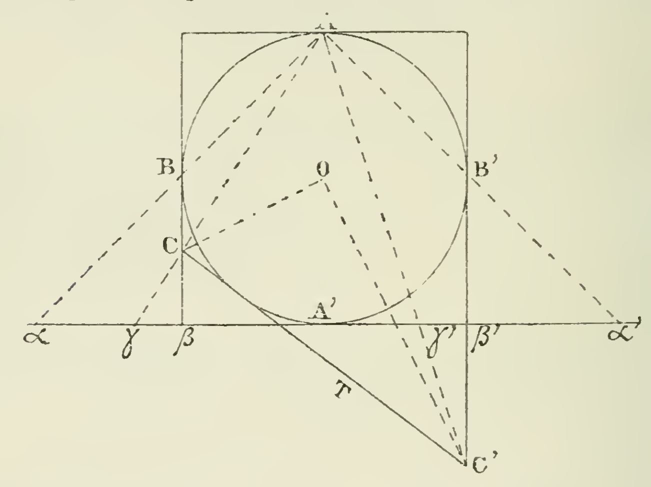
on en tire
$$CE = \frac{AA'.DE'}{AA' - DE'}.$$

L'égalité (1) devient

$$\frac{CG}{AA'} = \frac{AA'.DE'}{2AA'(AA' - DE') + AA'.DE'} = \frac{DE'}{2AA' - DE'} = \frac{DG'}{AA'}.$$

Donc $\frac{CG}{AA'} = \frac{DG'}{AA'}$ d'où $CG = DG'$.

Autrement (*). — Les droites AB, AB', les côtés B et B' du carré coupent le côté A' respectivement aux points α, α' β, β'. La tangente variable coupe les côtés B et B' aux points C et C' et les droites AC et AC' rencontrent A' en γ et γ'. L'angle COC' étant droit, les droites CO, C'O' décrivent, lors du déplacement de T, une involution circulaire et coupent par conséquent les côtés B et B' suivant des ponc-



tuelles C et C' projectives. Il en résulte immédiatement que leurs projections centrales γ et γ' sur A' sont aussi des couples de points correspondants de deux séries homographiques. Pour les positions A', B, B' de T on a les couples de points

(β, β'), (α, A'), $(A'\ \alpha')$ donc $(\alpha\beta A'\gamma) = (A'\beta'\alpha'\gamma')$.

Mais $\alpha A' = \beta\beta' = A\alpha'$; les séries sont donc égales et par conséquent $\gamma\gamma' = \beta\beta' =$ côté du carré.

Nota. — Solutions diverses par MM. Tzitzeica, E. Foucart et E.-N. Barisien.

(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

QUESTION 564

Solution par A. Droz-Farny.

On considère une parabole P. *En un point* M, *pris sur* P, *on trace la normale qui rencontre en* A *l'axe de* P. *Soit* Δ *la circonférence de centre* A; *de rayon* AM. *Par le foyer* F, *on mène une tangente* FB *à* Δ, *la parallèle à l'axe, passant par* B, *rencontre* P *en* C. *Démontrer que* BC *est de grandeur constante.*

(G. L.).

Représentons par μ, β, γ respectivement les projections des points M, B et C sur l'axe. La sous-normale μA est égale au demi-paramètre p. On a donc :

$$\overline{AM}^2 = \overline{M\mu}^2 + p^2 = 2p.\,S\mu + p^2$$

$$= 2p\left(S\mu + \frac{p}{2}\right) = 2p.\,FA$$

$$= \overline{AB}^2 = \beta A.\,FA.$$

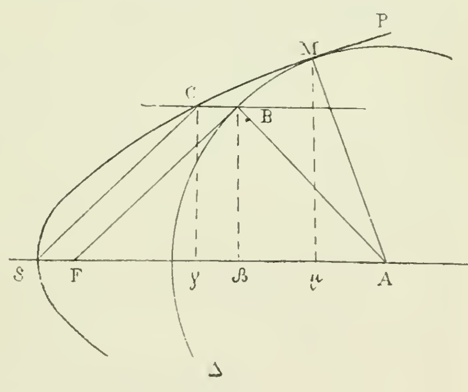
Il en résulte que

$$\beta A = 2p.$$

Dans le triangle rectangle FBA, on a : $\overline{B\beta}^2 = 2p.F\beta$; d'ailleurs,

$$\overline{C\gamma}^2 = 2p.S\gamma.$$

Donc $S\gamma = F\beta$; Les triangles $SC\gamma$ et $FB\beta$ sont donc égaux et la figure SFBC étant un parallélogramme, $BC = SF = \frac{p}{2}$.



Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, professeur au collège de Falaise; A. Davidoglou; G. Tzitzeica; E.-N. Barisien.

QUESTION 568

Solution par M. Jean NEGRETZU.

Résoudre l'équation :

$$2(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)+(x+\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^2$$
$$+(x+\beta-\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)^2+(x+\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=0.$$

(G. L.)

L'équation devient, en effectuant tous les calculs et en simplifiant,

$$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0.$$

Les trois racines de cette équation sont α, β, γ, car on a

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\equiv x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma.$$

Autrement (*). — Considérons l'identité

(1) $8pqr+p(q-r)^2+q(r-p)^2+r(p-q)^2\equiv(p+q)(q+r)(p+r).$

Si l'on pose

$$q+r=2(x-\alpha),$$
$$p+r=2(x-\beta),$$
$$p+q=2(x-\gamma),$$

d'où

$$p=x+\alpha-\beta-\gamma, \qquad q=x+\beta-\gamma-\alpha, \qquad r=x+\gamma-\alpha-\beta,$$

en remplaçant dans (1), on trouve

$$8(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)$$
$$+4(x+\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^2+4(x+\beta-\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)^2$$
$$+4(x+\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2\equiv8(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma.$$

Les racines de l'équation proposée sont donc α, β, γ.

Remarque. — L'identité (1) peut s'écrire

$$p(q+r)^2+q(p+r)^2+r(p+q)^2-4pqr\equiv(p+q)(q+r)(p+r).$$

Cette identité permet de résoudre les équations de la forme

$$(x+\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha)^2+(x+\beta-\gamma-\alpha)(x-\beta)^2+(x+\gamma-\alpha-\beta)(x-\gamma)^2$$
$$-(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)=0.$$

QUESTION 570

Solution par M. VAZOU, professeur au collège de Falaise.

Soit P *un point variable d'une ellipse de grand axe* AA′ *et de foyers* F, F′. *Au point* P *correspond, sur le grand axe, un point*

(*) Cette solution est de M. TZITZÉICA. Nous avons reçu une troisième solution de M. DAVIDOGLOU.

I *tel que* A'I = F'P. *La perpendiculaire élevée en* I, *sur l'axe, rencontre en* M *le diamètre* OP. *Le lieu du point* M *est une ellipse homothétique à la proposée.* (Droz-Farny.)

Soit H le pied de la perpendiculaire abaissée, de P, sur AA'; les triangles semblables OIM, OHP, donnent

$$\frac{OM}{OI} = \frac{OI}{OH},$$

or, on sait que

$$PF' = a + \frac{c}{a}\,OH,$$

par suite

$$OI = A'I - a = \frac{c}{a}\,OH.$$

Donc

$$\frac{OM}{OP} = \frac{c}{a}, \text{ etc...}$$

Nota. — Solutions diverses par MM. A. DAVIDOGLOU, J. TZITZEICA et BARISIEN.

M. Barisien, dans la solution qu'il nous adresse, observe que le point I est le centre du cercle inscrit dans le triangle PFF'.

QUESTIONS PROPOSÉES

602. — L'expression $3600^n - 1600^n - 189^n + 84^n$ est divisible par 1895.

(Davidoglou.)

603. — Les deux relations

$$\frac{a_1}{1 + b_1} + \frac{a_2}{1 + b_2} + \ldots + \frac{a_n}{1 + b_n} = \frac{A}{1 + B},$$

$$\frac{a_1(B - b_1)}{1 + b_1} + \frac{a_2(B - b_2)}{1 + b_2} + \ldots + \frac{a_n(B - b_n)}{1 + b_n} = 0,$$

entraînent la suivante

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A.$$

(Vautré.)

604. — Du point où le cercle inscrit dans le triangle abc donné touche le côté ab, on élève une perpendiculaire à ce côté. Cette droite est rencontrée en α par la perpendiculaire élevée de a à ac et en β par la perpendiculaire élevée de b à bc. Démontrer que $\alpha\beta = a\alpha - b\beta$. *(Mannheim.)*

605. — On donne un triangle abc. La perpendiculaire à ac, élevée du milieu de ce côté, coupe bc au point α. De même la perpendiculaire à bc, élevée du milieu de ce côté, coupe ac au point β.

Démontrer que a, β, α. b et le centre du cercle circonscrit à abc appartiennent à une même circonférence de cercle.

(Mannheim.)

606. — Par le milieu O de la bissectrice intérieure de l'angle A d'un triangle ABC, on mène une perpendiculaire à cette bissectrice. Cette perpendiculaire rencontre le côté AB en B′ et le côté AC en C′. Montrer que, D étant le point de rencontre des droites CB′ et C′B :

1° Le triangle CBD et le quadrilatère AB′DC′ ont des aires équivalentes;

2° La droite AD est la symédiane de l'angle A ;

3° Si l'on a, entre les côtés du triangle ABC, la relation

$$\overline{BC}^2 = AB \times AC,$$

le point st son centre des symédianes.

(E.-N. Barisien.)

607. — Démontrer géométriquement, que dans tout triangle, on a

$$(b + c) \sin \frac{A}{2} = a \sin \left(\frac{A}{2} + B\right).$$

(E.-N. Barisien.)

608. — Montrer que l'élimination du paramètre t entre les deux équations

$$a(t^6 + 1) - 3(x - a)t^2(t^2 + 1) = 0,$$
$$t^3(x - a) + 3tx - 2y = 0,$$

conduit à l'équation

$$4(x^2 + y^2) - 5ax + a^2 = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

609. — Dans tout triangle, le produit des trois médianes, divisé par le produit des symédianes, a pour expression

$$(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)(a^2 + b^2) : 8a^2b^2c^2.$$

(E.-N. Barisien.)

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX. RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 958-1-95.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mme Vve **F. Prime.**

(*Suite*, voir page 25.)

III. — Sur la théorie des projections.

A. — *Les projections dans le plan.*

I. *Définition du vecteur.* — Un segment quelconque AA_1, de l'axe x_1x, peut être engendré par le mouvement d'un mobile allant de A vers A_1. On convient de rappeler le sens de ce mouvement, en affectant la mesure de AA_1 du signe $+$ ou du signe $-$, selon que le mobile se déplace de x_1 vers x ou de x vers x_1. Et si l'axe x_1x est rectiligne, on donne au segment AA_1, ainsi déterminé, le nom de *vecteur;* A est l'origine et A_1, l'extrémité du vecteur.

2. **Théorème.** — *Si un mobile, partant du point* A *de l'axe* x_1x, *décrit successivement les vecteurs* $a_1, a_2..., a_n$, *pour s'arrêter en* A_n, *le vecteur* AA_n *sera, en grandeur et en signe, la grandeur algébrique des vecteurs* $a_1, a_2...., a_n$.

Il suffit évidemment de considérer le cas de deux vecteurs a_1, a_2. Désignons, par a_3, le vecteur AA_2, il faut démontrer que $a_3 = a_1, + a_2$.

Cette formule est évidente lorsque l'axe des vecteurs a_1, a_2 est nul et aussi lorsqu'ils sont égaux et de signes contraires. Les seules hypothèses à examiner sont donc les suivantes

1° $a_1 > 0$ avec $a_2 > 0$

2° $a_1 > 0$ avec $a_2 < 0$ et $|a_2| < a_1$

3° $a_1 > 0, a_2 < 0, |a_2| > a_1$

4° $a_1 < 0, a_2 > 0, a_2 > |a_1|$

5° $a_1 < 0, a_2 > 0, a_2 < |a_1|$

6° $a_1 < 0, a_2 < 0$.

Dans chacun de ces six cas, le théorème est de vérification immédiate. Ainsi, dans le troisième cas, on observe que la distance AA_2 est comptée dans le sens négatif et que sa valeur absolue est $(- a_2) - a_1 = - (a_1 + a_2)$; on a donc $a_3 = a_1 + a_2$.

3. **Corollaire.** — *Lorsque la somme algébrique des vecteurs que parcourt le mobile est identiquement nulle, la position finale coïncide avec la position initiale; et réciproquement.*

4. *Remarque.* — Le théorème précédent et son corollaire sont encore applicables si l'axe x_1x est curviligne; ainsi ils sont vrais pour les arcs de circonférence définis en trigonométrie.

5. *Définition de la projection d'un point sur un axe.* — Soit l'axe x_1x sur lequel on demande de projeter le point A. Imaginons que l'axe x_1x soit rencontré, par l'axe y_1y sous l'angle θ que nous supposons compris entre o et π. On sait que cet angle est celui dont il faut faire tourner x_1x, autour d'un de ses points et dans le sens admis comme sens positif, pour le rendre parallèle à l'axe y_1y.

La parallèle à y_1y, menée par A, rencontre x au point a; nous dirons que a est la projection d'angle θ du point A sur l'axe x_1x. La droite Aa s'appelle la projetante du point A.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, les projections sont dites orthogonales.

6. *Projection d'un vecteur sur un axe.* — La projection du vecteur AB sur l'axe x_1x est un second vecteur ab dont l'origine et l'extrémité sont respectivement la projection de l'origine et celle de l'extrémité du premier.

Nous indiquerons que le vecteur ab est la projection du vecteur AB sur l'axe x_1x, par la notation

$$(\overline{AB})\, x_1x = \overline{ab},$$

que nous lirons: vecteur AB projeté sur x_1x égale vecteur ab.

Sachant que $\overline{ab} + \overline{ba} = o$,

on a $(\overline{BA})x_1x = -(\overline{AB})x_1x.$

7. **Théorème.** — $A_1A_2\ldots A_n$ *étant un polygone plan, concave ou convexe, si un mobile, partant de* A_1, *y revient après avoir parcouru une seule fois les différents côtés du polygone, et si l'on considère chacun de ces côtés comme un vecteur ayant pour origine celui de ses sommets d'où part le mobile, la somme algébrique des projections des côtés du polygone sur un axe situé dans son plan est identiquement nulle.*

Soient $a_1, a_2 \ldots a_n$ les projections des sommets $A_1, A_2 \ldots A_n$ sur l'axe x_1x. Les projections des vecteurs $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$ sont les vecteurs $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \ldots \overline{a_{n-1}a_n}$. Or en vertu du n° 3, on a identiquement $\overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \ldots + \overline{a_{n-1}a_n} = 0$.

8. **Corollaire.** — *La projection d'un vecteur sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des éléments d'un contour polygonal ayant la même origine et la même extrémité que le vecteur.*

9. **Théorème.** — *Les projections d'un vecteur sur deux axes parallèles et de même sens sont égales en grandeur et en signe.*

Soient $\overline{ab}$, $\overline{\alpha\beta}$ les projections du vecteur AB sur les axes x_1x, $\xi_1\xi$ parallèles et de même sens. La figure $a\alpha\beta b$ étant un parallélogramme, les projections ab $\alpha\beta$ sont égales en valeur absolue. Elles ont en outre le même signe; car, b étant sur le segment ax de l'axe x_1x, β doit être sur le segment $\alpha\xi$ de $\xi_1\xi$, sinon $b\beta$ et $a\alpha$ se couperaient.

10. **Théorème.** — *Les projections sur un même axe de deux vecteurs égaux, parallèles et de même sens* (*), *sont égales en grandeur et en signe.*

1° Soient $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ les vecteurs considérés que nous supposerons d'abord appartenir à une même droite. Soit O le milieu des segments A_1B, AB_1 et a, b, a_1, b_1, o les projections des points A, B, A_1, B_1, O sur l'axe x_1x. En vertu d'un théorème connu, O est aussi le milieu des segments ab_1, a_1b et il en résulte les deux égalités

$$\overline{ao} = \overline{ob_1},$$
$$\overline{ob} = \overline{a_1o}$$

d'où, par addition

$$(\overline{ao} + \overline{ob}) \quad \text{ou} \quad \overline{ab} = (\overline{a_1o} + \overline{ob_1}) \quad \text{ou} \quad \overline{a_1b_1}.$$

2° Supposons, en second lieu, que les vecteurs $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ ne soient pas sur une même ligne droite. La figure ABB_1A_1 est un parallélogramme, les droites A_1B, AB_1 se coupent

(*) On peut dire aussi, pour abréger le langage, *équipollents*.

mutuellement en parties égales, et si O est leur point de rencontre, on a

$$\overline{AO} = \overline{OB_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{OB} = \overline{A_1O}.$$

Il en résulte, eu égard au n° 8 et au 1° de ce numéro, que

$$(\overline{AB})_x = (\overline{AO})_x + (\overline{OB})_x = (\overline{OB_1})_x + (\overline{A_1O})_x = (\overline{A_1B_1})_x.$$

11. *Coefficient directeur.* — Le coefficient directeur d'un axe Δ par rapport à des projections d'angle θ est la quantité λ définie par la relation

$$\lambda = r_x$$

sachant que r est un vecteur compté sur Δ et égal à l'unité positive.

Cette définition entraîne immédiatement ces conséquences :

1° *Deux axes parallèles et de même sens ont le même coefficient directeur (n° 10).*

2° *Deux axes parallèles et de sens contraires ont des coefficients directeurs égaux et de signes contraires (n° 6).*

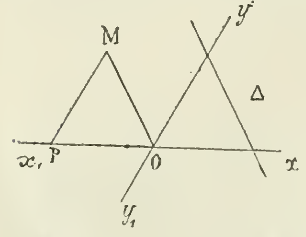
3° *Si les projections sont orthogonales, λ est le cosinus de l'angle α que la direction de l'axe Δ fait avec celle de x_1x.*

12. **Théorème.** — *Dans le cas de projections d'angle θ,*

$$\lambda = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}.$$

Cette formule est évidente lorsque $\alpha = k\pi$ ou $\theta + k\pi$, car elle donne $\lambda = \pm 1$ ou 0.

Plaçons-nous en dehors de ces cas spéciaux; soient y_1y la direction des projetantes et O le point où elle rencontre x_1x. Par O, menons $\overline{OM}$ parallèle à O et de même sens; si $\overline{OM} = 1$, la projection $\overline{OP}$ de $\overline{OM}$ sur x_1x est le coefficient λ de Δ. Quatre cas sont à considérer : α peut être compris entre 0 et θ, entre θ et π, entre π et $\pi + \theta$ et entre $\pi + \theta$ et 2π. Supposons, pour fixer les idées, $\theta < \alpha < \pi + \theta$; le triangle OPM donne



$$\text{OP} : \sin \text{OPM} = \text{OM} : \sin \text{OPM}.$$

Mais $\text{OP} = -\lambda$, $\text{OM} = 1$, $\text{OMP} = \alpha - \theta = -(\theta - \alpha)$, et $\text{OPM} = \theta$.

On a donc $-\lambda : \sin\{-(\theta-\alpha)\} = 1 : \sin\theta$,

d'où
$$\lambda = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}.$$

13. **Théorème.** — *λ étant le coefficient directeur de l'axe Δ sur lequel le vecteur r est compté, on a $r_x = \lambda . r$.*

Soient $\overline{AB} = r$, $\overline{ab} = r_x$; prenons, sur Δ, $\overline{AC} = 1$ et soit $(\overline{AC})_x = \overline{ac} = \lambda$.

Les droites Aa, Bb, Cc étant parallèles entre elles, on a
$$ab = \frac{ac}{AC}.AB$$
d'où
$$|r_x| = |\lambda r|.$$

Or, si r est positif, les points B, C sont du même côté du point A et il en est de même des points b, c par rapport à a; par suite, r_x et λ ou λr ont le même signe.

Si r est négatif, les points B.C sont de part et d'autre du point A; il en est de même des points b, c par rapport au point a, c'est-à-dire que r_x et λ ont des signes contraires et, par suite, r_x et λr ont le même signe.

On a donc toujours $r_x = \lambda r$.

14. **Théorème de Laisant.** — *Si l'on a les deux identités*

(1)
$$\sum_1^n r_i \cos\alpha_i = 0,$$

et

(2)
$$\sum_1^n r_i \cos(\alpha_i + p) = 0,$$

avec la condition $p \neq k\pi$,

l'on aura aussi
$$\sum_1^n r_i \cos(a_i + q) = 0,$$

q *étant une quantité quelconque.*

Prenons un axe quelconque et construisons le contour polygonal $A_0A_1 \dots A_n$ dont les éléments $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ... $\overline{A_{n-1}A_n}$ sont respectivement définis par les quantités (r_1, α_1), (r_2, α_2) ... (r_n, α_n). Supposons que, pour former ce contour, nous

devions introduire le vecteur $r_{n+1} = A_n A_0$ faisant avec $x_1 x$ l'angle α_{n+1}.

Si nous faisons tourner l'axe $x_1 x$, autour d'un de ses points, de l'angle $-p$, les angles α_1, α_2 ... deviennent $\alpha_1 + \beta$, $\alpha_2 + \beta$, ... Soit $\xi_1 \xi$ la nouvelle position de l'axe $x_1 x$.

Projetons orthogonalement le polygone $A_0 A_1 \ldots A_n$, d'abord sur $x_1 x$, puis sur $\xi_1 \xi$. On obtient les deux identités

$$(1') \qquad \sum_1^{n+1} r_i \cos \alpha_i = 0,$$

et

$$(2') \qquad \sum_1^{n+1} r_i \cos (\alpha_i + p) = 0.$$

Retranchons (1) de (1′) et (2) de (2′) et nous aurons

$$r_{n-1} \cdot \cos \alpha_{n+1} = 0,$$

avec

$$r_{n-1} \cdot \cos (\alpha_{n+1} + p) = 0.$$

Or, l'angle p étant différent de $k\pi$, on ne peut pas avoir à la fois

$$\cos \alpha_{n+1} = \cos (\alpha_{n-1} + p) = 0,$$

c'est donc que $r_{n+1} = 0$. Mais alors A_n coïncide avec A_m et le contour polygonal $A_0 \ldots A_n$ est fermé. Faisons tourner $x_1 x$ de l'angle $-q$ et projetons orthogonalement le contour $A_0 \ldots A_n$ sur la nouvelle position de l'axe; nous obtenons ainsi l'identité

$$\sum_1^{n+1} r_i \cos (\alpha_i + q) = 0.$$

(A suivre.)

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

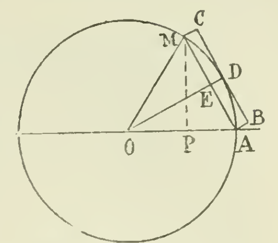
DE L'INÉGALITÉ $x - \sin x < \frac{x^3}{4}$

Par M. **Maurice Fouché**, professeur de mathématiques élémentaires à Sainte-Barbe.

La démonstration qu'on donne habituellement de l'inégalité

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4},$$

présente un caractère artificiel qui la rend assez difficile à retenir, au moins par les commençants. Le raisonnement suivant ne me paraît pas présenter cet inconvénient; du moins, au même degré.



Si on désigne par x l'arc AM, l'expression $x - \sin x$ représente le double de l'aire du segment compris entre l'arc et la corde, laquelle est plus petite que celle du rectangle AMCB compris entre la corde et la tangente parallèle CB. On aura donc :

$$x - \sin x < 2\mathrm{AM}.\mathrm{ED} = 4 \sin \frac{x}{2}\left(1 - \cos \frac{x}{2}\right)$$

$$= 8 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4},$$

et *a fortiori* : $x - \sin x < 8 . \frac{x}{2} . \frac{x^2}{16} = \frac{x^3}{4}$.

PROPRIÉTÉS DU CARRÉ MAGIQUE DE 3

Par M. **G. Tarry.**

Considérons trois carrés de trois cases de côté.

Dans les cases du premier carré plaçons les neuf premiers nombres entiers suivant l'ordre d'un carré magique.

Dans les cases du deuxième carré, plaçons ces nombres à la suite les uns des autres dans leur ordre naturel, en partant d'une case quelconque et en suivant les directions des lignes et des colonnes.

Dans les cases du troisième carré, portons les nombres égaux à la somme des deux nombres inscrits dans les cases correspondantes des deux autres carrés.

La somme des carrés des nombres du troisième carré est constante.

De plus, si les nombres du deuxième carré ont été placés en partant d'un coin, la somme des cubes du troisième carré est aussi constante.

EXEMPLES

Premier carré.			*Deuxième carré.*			*Troisième carré.*		
2	9	4	7	8	9	14	72	36
7	5	3	1	2	3	7	10	9
6	1	8	4	5	6	24	5	48
2	9	4	2	1	3	4	9	12
7	5	3	5	4	6	35	20	18
6	1	8	8	7	9	48	7	72
2	9	4	6	4	5	12	36	20
7	5	3	3	1	2	21	5	6
6	1	8	9	7	8	54	7	64

La somme des neuf nombres du troisième carré est toujours égale à

$$225 = 5 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9).$$

Les nombres du troisième carré sont les produits des nombres correspondants des deux premiers carrés. Donc si, au lieu du produit, on avait pris la somme, la somme des carrés des nombres du troisième carré aurait été

$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 225).$$

Écrivons le carré magique sous la forme

$$\begin{array}{ccc} 5 - p & 5 + p + q & 5 - q \\ 5 + p - q & 5 & 5 + q - p \\ 5 + q & 5 - p - q & 5 + p \end{array}$$

Sous cette forme, il sera facile de vérifier la propriété relative à la somme des produits des nombres correspondants, et par conséquent celle des carrés.

Le développement fait voir en outre que

1° $1^2(5 - p) + 2^2(5 + p + q) + 3^2(5 - q) + 4^2(5 + p - q)$
$+ 5^2.5 + 6^2(5 + q - p) + 7^2(5 + q) + 8^2(5 - p - q) + 9^2(5 + p)$

est une quantité indépendante des valeurs de p et q.

2° $(5 - p)^2 + 2(5 + p + q)^2 + 3(5 - q)^2 + 4(5 + p - q)^2$
$+ 5.5^2 + 6(5 + q - p)^2 + 7(5 + q)^2 + 8(5 - p - q)^2 + 9(5 + p)$

est égal à $30(p^2 + q^2)$ + constante,

Or $p^2 + q^2$ est égal à $(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2$.

Cette dernière quantité est donc aussi constante. Ce qui démontre la propriété relative aux cubes.

SUR LES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

Par M. **Maurice Fouché,** professeur à Sainte-Barbe.

(*Suite* et *fin*, voir page 35.)

Un caractère de divisibilité peut ainsi être défini par les nombres suivants :

1° Nombre p des chiffres des tranches dans lesquelles on décompose le nombre ; c'est le plus petit nombre p tel que

$$10^p = md + 1 ;$$

2° Nombre $\frac{p}{2}$ qui indique la subdivision du nombre réduit en deux nouvelles tranches égales et la soustraction de la tranche de gauche de celle de droite, mais dans le cas seulement où

$$10^{\frac{p}{2}} = md - 1 ;$$

3° Groupes des nombres k et α tels que

$$10^k = md + \alpha$$

en choisissant les plus convenables ;

4° Diviseur n des dizaines tel que

$$10n = md \pm 1.$$

En partant de ces principes nous avons construit le tableau suivant qui donne les caractères de divisibilité de tous les nombres premiers avec 10 jusqu'à 121, et de quelques autres plus grands. Pour expliquer l'usage de ce tableau, il nous suffira de formuler la règle générale suivante qui découle immédiatement des considérations précédentes.

1° *Partager le nombre en tranches de* p *chiffres et ajouter les tranches ;*

2° *Subdiviser le nombre ainsi obtenu en deux tranches de* $\frac{p}{2}$ *chiffres*

et retrancher la tranche de gauche de celle de droite. — On ne fera pas cette opération pour les diviseurs où la colonne $\frac{p}{2}$ *restera vide ;*

3° *Séparer* k *chiffres à droite, multiplier la partie de gauche par* α *et ajouter le produit, pris avec son signe à la partie de droite ; recommencer autant de fois que possible avec les mêmes nombres* k *et* α, *puis avec d'autres nombres* k′, α′, *s'il y en a plusieurs groupes dans le tableau.*

4° *Diviser les dizaines du nombre réduit par le diviseur des dizaines* n *et ajouter le quotient au nombre formé par le reste de cette division suivi du chiffre des unités. On retranchera le quotient au lieu de l'ajouter quand le diviseur* n *sera précédé du signe* —.

TABLEAU DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

de tous les nombres premiers avec 10 jusqu'à 121.

d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n	d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n
3	1	»	»	»	»	31	15	»	6	2	−3
7	6	3	2	2	−2				»	»	
9	1	»	»	»	»	33	2	»	2	7	10
11	2	1	»	»	»	37	3	»	»	»	−11
13	6	3	»	»	4	39	6	»	5	4	
17	16	8	4	4					3	−14	4
			2	−2	−5	41	5	»	4	−4	−4
19	18	9	5	3		43	21	»	9	−2	
			2	5	2				3	11	13
21	12	»	5	−2		47	46	23	14	4	
			4	4	−2				7	−2	
23	22	11	6	6					4	−11	−15
			3	11	7	49	21	»	4	4	
27	4	»	»	»	−5				2	2	5
29	28	14	8	−4		51	16	»	8	16	
			4	−5	3				4	4	
									2	−2	−5

d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n	d	p	$\frac{p}{2}$	k	α	n
53	13	»	6	−4		89	22	»	14	−2	
			3	−7					9	5	
			2	−6	16				6	−4	
57	56	28	16	4					2	11	9
			11	5		91	6	3	2	9	−9
			8	−2	−17	93	15	»	7	−11	
59	58	29	21	−4					2	7	28
			12	22		97	96	48	28	−4	
			6	9					11	5	
			3	−3	6				4	9	
61	60	30	15	−11					2	3	−29
			12	−3		99	2	»	»	»	»
			5	21		101	4	2	»	»	»
			3	24	−6	103	34	17	12	8	
63	6	»	3	−8	19				4	9	
67	14	7	5	2					2	−3	31
			3	−5	−20	107	53	»	21	−2	
69	22	»	16	4					7	101	
			4	−5	7				3	−7	−32
71	35	»	23	4		109	108	54	28	3	
			17	8					16	5	
			9	3					8	21	
			3	6	−7				3	19	11
73	8	4	»	»	22	111	3	»	»	»	»
77	6	3	»	»	−23	113	112	56	22	11	
79	13	»	7	22					16	−7	
			2	21	8				5	−5	34
81	9	»	6	55		117	6	»	4	55	−35
			2	19	−8	119	48	»	23	5	
83	41	»	22	−2					15	22	
			12	7					4	4	12
			4	4	25	121	22	11	3	32	11
87	28	»	20	7							
			11	31							
			4	−5	−26						

QUELQUES AUTRES DIVISEURS

271	5	»	»	»	27	33333	5	»	»	»	»
333	5	»	»	»	»	99999	5	»	»	»	»
999	3	»	»	»	»	A (*)					
1001	8	4	»	»	»		6	»	»	»	»
1111	4	»	»	»	»	499	»	»	3	2	50
3333	4	»	»	»	»	501	»	»	3	−2	−50
9999	4	»	»	»	»	167	»	»	3	−2	−50
11111	5	»	»	»	»						

Il est bien clair qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser tous les caractères indiqués pour chaque diviseur. Dans bien des cas, par exemple, pour les diviseurs 91, 97, 103, le dividende pouvant être réduit à deux chiffres, il sera inutile d'appliquer le caractère qui consiste à diviser les dizaines par n; mais on peut préférer pousser la réduction moins loin et appliquer ce caractère par division des dizaines.

Il peut être utile aussi d'observer qu'on peut arriver à trouver le reste par l'application d'un seul caractère. Soit par exemple le diviseur 97 qui admet le caractère $k = 2$, $\alpha = 3$, ce qui veut dire qu'on ne change pas le reste en ajoutant au nombre formé par les dizaines et les unités le triple des centaines. On déduit aisément de cette proposition la règle suivante :

Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 97, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre. On multiplie la première tranche à gauche par 3 et on l'ajoute à la suivante; si la somme a plus de deux chiffres, on multiplie le chiffre des centaines par 3 et on l'ajoute au nombre formé par les deux autres chiffres, et ainsi de suite jusqu'à ce que le résultat n'ait que deux chiffres. On multiplie ce résultat par 3

(*) A désigne un quelconque des diviseurs de
$$3^3.7.11.13.37 = 999999$$

Remarques. — 1° Il est bien clair que quand le diviseur des dizaines est 20, 30, 50, etc., il suffit de diviser les centaines par 2, 3, 5, etc.;

2° Pour le diviseur 103, le caractère qui consiste à diviser les dizaines par 31 devient inutile, si on s'est servi de $k = 2$, $\alpha = -3$, puisqu'alors le nombre n'a plus que deux chiffres.

et on l'ajoute à la tranche suivante, puis on continue de la même manière, en opérant sur les tranches successives, de gauche à droite, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre de deux chiffres.

Voici le type du calcul pour le nombre

756 435 987 645 987

7	56	43	59	87	64	59	87
	21	2.31	2.40	24	42	27	2.58
	77	6	6	1.11	1.06	86	6
		80	1.05	3	3		1.51
			3	14	9		3
			8				54

Le reste est 54.

On pourra de même, par l'examen du tableau précédent, trouver un grand nombre de régles analogues.

Comme dernier exemple, je vais chercher le reste de la division du nombre précédent par 167. Il résulte du tableau qu'il faut partager le nombre en tranches de trois chiffres, multiplier chaque tranche par -2, en commençant par la gauche, et ajouter le résultat à la tranche suivante :

756	435	987	645	987
	− 1.512	+ 150	− 270	− 750
	− 1.077	+ 1.137	+ 375	+ 237
	+ 2	− 2		− 167
	− 75	+ 135		70

Le reste est 70.

Cas d'un diviseur non premier avec 10.

Un pareil diviseur sera de la forme $d = d' \, 2^{\alpha} \, 5^{\beta}$, d' étant premier avec 10. Soit γ le plus grand des deux nombres α et β. A la droite du nombre proposé N nous séparerons γ chiffres, de manière à l'écrire

$$A = P.10^{\gamma} + Q;$$

puis, nous chercherons le reste de la division de P par d' par l'application des caractères connus, puisque d' est premier avec 10.

Soit $$P = m.d' + r.$$

On aura $$A = m.d'.10^{\gamma} + r.10 + Q.$$

Mais $d'.10^\gamma$ est un multiple de d, et le reste est le même que celui de $r.10^\gamma + \alpha$, c'est-à-dire qu'à la droite du résidu correspondant au module d', on écrira les γ chiffres du nombre proposé qui n'ont pas servi, et c'est le nombre ainsi formé qu'on divisera par d.

L'application de ce raisonnement au diviseur $52 = 13 \times 4$ conduit à la règle suivante complétée par cette remarque que $100 = m.52 - 4$.

Pour trouver le reste de la division d'un nombre par 52, *on isole deux chiffres à la droite de ce nombre, et on partage les chiffres restant en tranches de 6 chiffres de gauche à droite, la dernière tranche à gauche pouvant avoir moins de 6 chiffres. On ajoute toutes ces tranches, non compris les 2 chiffres isolés à droite, et on recommence jusqu'à ce que le nombre ait 8 chiffres au plus. Alors laissant toujours les 2 chiffres de droite isolés, on partage les 6 autres en deux tranches de trois chiffres, et on retranche celle de gauche et celle de droite, en ajoutant à celle-ci, si c'est nécessaire, un multiple de* 130. *Le nombre ainsi réduit a au plus 5 chiffres; on le partage en tranches de 2 chiffres de gauche à droite, la 3ᵉ tranche n'ayant qu'un chiffre; puis, commençant par la gauche, on multiplie la première tranche par* -4 *et on ajoute le résultat à la suivante; on multiplie la somme par* -4 *et on l'ajoute à la tranche suivante, et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre n'ait plus que deux chiffres. Si le résultat ainsi obtenu est plus petit que* 52, *c'est le reste, sinon on en retranche* 52 *unités et on trouve le reste.*

Exemple :

84·567898·765483·127 684·37
765 483
567 898
84
―――――
1.461 149
1
―――――
461.150
130 × 4 = 520
―――――
670
− 461
―――――
2·09·37

2 09 37
− 8 − 4
――― ―――
+ 1 33

Le reste est 33.

A l'aide du tableau précédent, on formera de même un très grand nombre de caractères de divisibilité conduisant à des calculs notablement plus simples que ceux que donnerait la simple division par les diviseurs.

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin**

369. — *On ne saurait trouver :*

27.28.29.30.31.32.34.35.37.38.39.40.41.42.43.44.45 ou 46 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

(Voir *J. M. E.*, année 1893, p. 274, Ex. 298.)

370. — *Trouver* 26 *entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation

$$26k^2 - 225r^2 = y^2,$$

qui admet une infinité de solutions ; il en est donc de même de la question proposée, en particulier pour $r = 1$

$$25^2 + 26^2 + 27^2 + \ldots + 50^2 = 195^2,$$

pour $r = 5$ $$62^2 + 67^2 + 72^2 + \ldots + 137^2 = 663^2.$$

371. — *Trouver* 33 *nombres entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

On est conduit à l'équation :

$$11k^2 = 272r^2 + 3y^2$$

qui admet une infinité de solutions entières, il en est donc de même du problème proposé. En particulier, pour $r = 1$

$$7^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + 39^2 = 143^2,$$
$$27^2 + 28^2 + 29^2 + \ldots + 59^2 = 253^2,$$
$$227^2 + 228^2 + 229^2 + \ldots + 259^2 = 1397^2.$$

372. — *Trouver 36 entiers positifs en progression arithmétique et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.*

$6r$ désignant la raison de la progression, on est amené à résoudre en nombres entiers l'équation

$$k^2 = 3885r^2 + y^2$$

qui admet une infinité de solutions ; il en est donc de même de la question proposée. En particulier pour $r = 1$, on a

$$17^2 + 23^2 + 29^2 + \ldots + 227^2 = 822^2.$$

373. — *On ne saurait trouver ni* 4, *ni* 6 *triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.*

374. — *Trouver trois triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.*

Soit x le rang du plus petit, on a à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$3x^2 + 9x + 8 - K(K + 1) = 0.$$

On trouve $2x = y - 3$, $2K = 3z - 1$,
y et z étant déterminés par l'équation

(1) $$y^2 = 3z^2 - 2.$$

Cette équation ayant une infinité de solutions, il en est de même du problème proposé.

La relation (1) est complètement résolue par les suites :

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 5, \quad y_2 = 19 \ldots y_n = 4y_{n-1} - y_{n-2},$$
$$z_0 = 1, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 11 \ldots z_n = 4z_{n-1} - z_{n-2},$$

d'où $x_1 = 1$, $x_2 = 8$, $x_3 = 34$, $x_4 = 131$ ...

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2} + 3.$$

375. — *Trouver cinq triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.*

On est conduit à résoudre en nombres entiers :

$$5y^2 + 36 = z^2.$$

qui admet une infinité de solutions; il en est donc de même de la question proposée. Cette équation est complètement résolue par les suites

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 9 \ldots y_n = 3y_{n-1} - y_{n-2},$$
$$z_0 = 6, \quad z_1 = 9, \quad z_2 = 21 \ldots z_n = 3z_{n-1} - z_{n-2}.$$

Si x est le rang du plus petit des triangulaires cherchés, on a

$$2x = y - 5.$$

On obtient toutes les solutions par la suite :

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{19}{2}, \quad x_3 = 29, \quad x_4 = 80 \ldots$$

$$x_n = 3x_{n-1} - x_{n-2} + \frac{5}{2},$$

en rejetant les valeurs de x dont l'indice est de la forme $3m - 1$, valeurs qui ne sont pas entières.

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Esquirol, *professeur au lycée de Montpellier.*

A propos de la question soulevée (*) par l'établissement géométrique de la formule

(1) $$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A + B}{2},$$

que l'on rencontre dans le deuxième cas de résolution des

(*) Voir *Journal*, page 15.

triangles quelconques, est-il contraire à l'esprit du programme de seconde moderne de faire reposer la formule (1) sur la *démonstration géométrique* des formules qui transforment en produit $\sin A \pm \sin B$?

Si cela était permis, on arriverait à la formule (1) par le calcul classique, après avoir *établi géométriquement* les formules

$$(2) \quad \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2},$$

$$(3) \quad \sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2}.$$

Or, ceci est facile.

Supposons que A et B désignent deux angles d'un triangle; soit $B < A$, et représentons : A par l'angle XOA ; B, par XOB. Si $A < 90^\circ$, on a la *figure 1;* si $A > 90^\circ$, on a la *figure 2,* car $\frac{A+B}{2} < 90^\circ$.

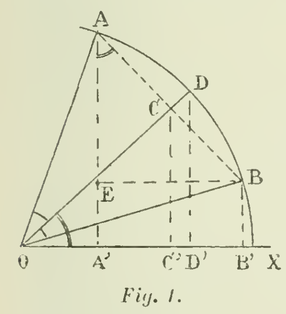


Fig. 1.

Fig. 2.

Soit OD la bissectrice de $\widehat{BOA}$. Coupons les côtés par un arc de cercle de centre O et de rayon 1, puis traçons : BE, parallèle à XO ; AA', BB', CC', DD', perpendiculaires sur OX. On a

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = \frac{A-B}{2}, \quad \widehat{XOD} = \frac{A+B}{2},$$

$$CC' = \frac{1}{2}(AA' + BB'), AE = AA' - BB'.$$

1° Les triangles OCC', ODD' semblables donnent

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{OC}{OD},$$

d'où $CC' = OC \times DD'$, puisque $OD = 1$.

Donc $AA' + BB' = 2.OC.DD'$; et, en remplaçant chaque longueur par la ligne trigonométrique qu'elle représente,

$$\sin A + \sin B = 2.\cos\frac{A-B}{2}.\sin\frac{A+B}{2};$$

c'est la formule (2);

2° Les triangles BAE, ODD' semblables donnent

$$\frac{AE}{AB} = \frac{OD'}{OD},$$

ou (puisque $AB = 2AC$, $OD = 1$)

$$AE = 2AC.OD'.$$

Finalement

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A+B}{2};$$

c'est la formule (3).

En adoptant cette voie, les élèves de seconde moderne pourraient utiliser les formules (2) et (3), ainsi que les formules analogues en $\cos A \pm \cos B$, $\operatorname{tg} A \pm \operatorname{tg} B$ qu'on en déduit facilement, sans avoir recours aux formules de l'addition des arcs.

BACCALAURÉATS

Académie de Nancy.

1° *Questions à choisir :* (*a*) Démontrer que tout déplacement d'une figure plane de forme invariable, dans son plan, se ramène à une rotation ou a une translation; (*b*) On prolonge les arêtes d'un angle trièdre quelconque au delà de son sommet. Montrer que le nouvel angle trièdre ainsi obtenu ne peut, en général, lui être superposé. Trouver les conditions pour que les deux trièdres soient superposables; (*c*) Démontrer que deux figures symétriques par rapport à une droite sont superposables, et que les symétriques d'une même figure par rapport à un plan et par rapport à un point de ce plan sont deux figures superposables

2° *Problème.* — On donne deux circonférences extérieures de centres O et O' et de rayons R et R', la distance des centres étant $OO' = a$. Par le centre O de l'une, on mène une droite OA faisant avec OO' un angle $x = AOO'$, et du centre O' de l'autre, on abaisse O'A perpendiculaire sur OA. Soient respectivement B et B' les points où les droites OA, O'A rencontrent les circonférences O et O', on joint BB' et on considère le quadrilatère BB'O'O.

(*a*) A quelle équation doit satisfaire l'angle x pour que le quadrilatère soit inscriptible?

(*b*) Déterminer l'angle x de manière que le quadrilatère ait une surface donnée. Discuter. Maximum de la surface.

Académie de Poitiers.

1° *Questions à choisir :* *(a)* Théorie du plus grand commun diviseur de deux nombres (par les divisions successives); *(b)* Erreur relative d'un produit et d'un quotient; *(c)* Définition et extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire à $1/10^n$ près.

2° *Problème.* — Deux triangles équilatéraux ABC, A'BC ont un côté commun BC et leurs plans font entre eux un angle x. Exprimer, en fonction de x et du côté a de ces triangles, le volume du tétraèdre ABCA'. Variation de ce volume. Valeurs de $\sin x$ et $\cos x$, lorsque le tétraèdre est régulier.

Académie de Rennes.

1° *Questions à choisir :* *(a)* Etudier depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$ la fonction

$$y = a(x - \alpha) + \frac{b}{x - \beta}$$

où a, b, α, β, sont des constantes. Discontinuités, maximum et minimum *(b)* Montrer que le trinôme $y = ax^4 + bx^2 + c$ ne peut avoir un diviseur réel du premier degré en x sans en avoir un second. Conditions pour que ce trinôme admette ainsi deux diviseurs du premier degré, réels, et deux seulement; conditions pour qu'il en ait quatre. Discussions des valeurs de ce polynôme dans ces deux cas, en supposant x variable de $-\infty$ à $+\infty$; *(c)* Intérêts composés. Valeur de l'annuité qui, à un taux connu, éteindra, après n versements, un capital donné. Que deviendra la formule si le nombre des versements est illimité ?

2° *Problème.* — On donne un point C à la distance c du centre O d'une circonférence de rayon a, et l'on prend sur cette circonférence un point M dont le rayon OM fait avec OC l'angle $COM = \alpha$. La sécante CM coupe la circonférence en un second point M'; *(a)* Calculer, en fonction de α, le diamètre de la circonférence qui passe en O, M, M', et en trouver les maxima ou minima quand α varie ; *(b)* Déterminer le point C' où cette circonférence variable coupe OC : que devient ce point quand α varie ? *(c)* Evaluer C'M, C'M' et leur rapport ; *(d)* Prouver que le produit C'M, C'M' a une valeur indépendante de α.

Académie de Toulouse.

1° On donne, dans un plan Q, deux points A et B dont on désigne la distance par a, et on mène dans ce plan le cercle ayant AB pour diamètre. Au point B, on élève une droite BS de longueur h, perpendiculaire au point Q. On propose de mener par le point A une corde AM de la circonférence, telle que l'aire du triangle SAM soit égale à une quantité donnée qu'on désignera par $\frac{1}{2}at$.

2° Calculer, à un millimètre près, le côté d'un triangle équilatéral dont l'aire est égale à un mètre carré.

1° Trouver le premier terme et la raison d'une progression géométrique, connaissant la somme t du premier et du cinquième termes, et la somme Kt du second et du quatrième. K et t sont des nombres donnés. Discussion.

2° Un promeneur se trouve sur une falaise à 80 mètres au-dessus du niveau de la mer. Quelle est, à un kilomètre près, la distance à laquelle il peut voir en mer ?

NÉCROLOGIE

Les sciences et l'Italie viennent de faire une grande perte en la personne du Père *Francisco Denza*, barnabite, l'un des plus savants astronomes du XIXe siècle, Président de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, Directeur de l'observatoire du Collège romain. Ses études sur les étoiles filantes sont connues dans tous les pays du monde où l'on s'occupe des phénomènes célestes. Citons parmi ses principaux ouvrages :

Les étoiles filantes de novembre 1868 et août 1869 observées en Piémont et dans d'autres contrées d'Italie. — Observations des météores. — Rapports sur les observations des éclipses. — Le commodore Maury et la correspondance météorologique des Alpes et des Apennins. — Etudes sur la climatologie de la vallée d'Aoste. — Les étoiles filantes d'août 1885. — Taches solaires, perturbations magnétiques et aurores polaires.

L'unité des forces physiques, publiée à Milan par le P. Angelo Secchi, en 1885, est précédée d'une remarquable esquisse biographique du savant jésuite par le P. Denza. Dans la séance de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei* du 21 janvier de cette année, le P. Denza, président, donnait encore lecture à ses collègues d'une dernière *Note sur les taches solaires observées en 1893.*

Aristide MARRE,
Correspondant de l'Académie pontificale
des *Nuovi Lincei.*

Vaucresson, le 21 décembre 1894.

A PROPOS DE LA QUESTION 562 (*)

M. Mannheim, qui a proposé cette question, nous fait observer que la solution est aussi simple lorsqu'on prend l'énoncé suivant :

(*) Voyez la solution publiée dans le numéro de février, p. 43.

Depuis l'apparition de ce numéro, nous avons reçu une solution de M. ALETROP, à Madrid, de cette intéressante question.

Nous prions, à ce propos, et de nouveau, nos collaborateurs de vouloir bien *presser l'envoi de leurs solutions.* Elles ne resteront pas longtemps dans nos cartons. *G. L.*

On donne un cercle et un trapèze qui lui est circonscrit. Les points de contact des côtés sont a, b, c, d *en commençant par le point de contact d'un des côtés parallèles. Au point arbitraire* t *du cercle, on mène une tangente qui coupe en* m, n, *les côtés tangents en* b, d : *les droites* am, an *interceptent sur le côté tangent en* c *un segment de grandeur constante, lorsque* t *varie de position sur le cercle.*

Menons le diamètre parallèle aux côtés du trapèze tangents en a et c. Appelons b', m', t', n', d' les points de rencontre de ce diamètre et des droites ab, am, at, an, ad. On sait que $b'm' = m't'$, $t'n' = n'd'$. Il résulte de là que $m'n'$ est la moitié de $b'd'$, c'est-à-dire de longueur constante, quelle que soit la position de t. Comme ce segment $m'n'$ est la moitié du segment intercepté par les droites am, an sur le côté tangent en c, la propriété est démontrée.

QUESTION 572

Solution par A. Droz-Farny.

Dans un triangle ABC *dont les hauteurs sont* AA′, BB′, CC′, *on prend les symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux sommets du triangle et on obtient ainsi un triangle* A″B″C″. *On prend encore les symétriques des sommets* A, B, C *par rapport aux pieds des hauteurs* A′, B′, C′, *et on obtient un triangle* A‴B‴C‴. *Si* S, S′, S″, S‴ *représentent respectivement les aires des triangles* ABC, A′B′C′, A″B″C″, A‴B‴C‴, *on a les relations suivantes :*

$$S'' - S' = 6S, \qquad S''' - 4S' = 3S, \qquad 4S'' - S''' = 21S.$$

(E.-N. Barisien.)

I. *Calcul du triangle* S′. — Le triangle AB′C′ est semblable au triangle ABC, le rapport de similitude étant cosA.

On a donc $AB'C' = S.\cos^2 A$.

d'où $S' = S[1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C]$

(1) $S' = 2S.\cos A.\cos B.\cos C.$

II. *Calcul du triangle* S″. — On a

$$AA' = 2R\sin B\sin C$$
$$AH = 2R\cos A$$

angle $AHB = 180° - C$,

triangle

$HA''B'' = 2R^2(\cos A + \sin B \sin C)(\cos B + \sin A \sin C)\sin C.$

En additionnant les trois triangles analogues, on a

$$S'' = 2R^2\left[\begin{array}{l}\Sigma\cos A\cos B\sin C + \Sigma(\cos A\sin A\sin^2 B + \cos A\sin A\sin^2 C) \\ \qquad + \sin A\sin B\sin C(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)\end{array}\right].$$

Or, on trouve aisément

$$\Sigma\cos A\cos B\sin C = \sin A\sin B\sin C,$$

$$\Sigma\cos A\sin A(\sin^2 B + \sin^2 C) = 3\sin A\sin B\sin C.$$

et $$\sin A\sin B\sin C(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$
$$= 2\sin A\sin B\sin C(1 + \cos A\cos B\cos C),$$

d'où $$S'' = 4R^2\sin A\sin B\sin C(3 + \cos A\cos B\cos C),$$

(2) $$S'' = S(6 + 2\cos A\cos B\cos C).$$

III. *Calcul de* S'''.

$$S''' = 4S - CA'''B''' - BA'''C''' - AB'''C'''.$$

Or

$$CA'''B''' = \frac{ab}{2}\sin 3C = S\frac{\sin 3C}{\sin C} = S(3 - 4\sin^2 C),$$

donc $$S''' = 4S - S[9 - 4(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)]$$

(3) $$S''' = S(3 + 8\cos A\cos B\cos C)$$

Les relations de M. Barisien sont la conséquence directe des formules développées.

Nota. — Autre solution par M. DAVIDOGLOU.

QUESTIONS PROPOSÉES

610. — Soient AT_1, BT_2, CT_3 les tangentes en A, B, C au cercle circonscrit au triangle ABC; T_1, T_2, T_3 étant les points où ces tangentes rencontrent BC, CA, AB. On considère ces tangentes comme positives, si elles rencontrent les côtés dans les directions BC, CA, AB; négatives, si elles les rencontrent dans le sens contraire. Montrer qu'on a toujours

$$\frac{1}{AT_1} + \frac{1}{BT_2} + \frac{1}{CT_3} = 0.$$

(*Tzitzéica.*)

611. — On considère le point de Steiner R et les deux points ω, ω' de Brocard, d'un triangle ABC; $R\omega$ rencontre AC en M, $R\omega'$ rencontre AB en N. Les droites $B\omega$ et $C\omega'$ se rencontrent sur MN. (*Tzitzéica.*)

612. — 1° On considère un triangle ABC rectangle en A, les pieds M et M′ de la hauteur et de la symédiane issues de A; on achève le parallélogramme AMM′D. Montrer que ABCD est un rectangle *(Tzitzéica.)*

613. — On prolonge la diagonale $AC = a$ d'un rectangle d'une longueur $AE = b$; puis on projette E en F et G sur AD et AB. Soient d, d' les distances de A à BD et FG, et δ la distance des points M et N, projections du point A sur BF et DG. Montrer que l'aire S du triangle AMN est donnée par

$$2S = \delta^2 . \frac{d - d'}{a + b} .$$

(Tzitzéica.)

614. — Résoudre les deux équations

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 .$$

(E.-N. Barisien.)

615. — Soient H le pied de la hauteur AH d'un triangle, E et E′ les points de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit situé dans l'angle A. D et D′ les points de contact de la seconde tangente commune intérieure à ces deux cercles; les triangles HDE′ et HEE′ sont semblables, et la droite HC est la bissectrice commune des angles DHE′ et EHD′. *(L. Vautré.)*

616. — Les symétriques d'une même figure F_0, prises respectivement par rapport aux trois côtés d'un triangle, sont trois figures égales F_1, F_2, F_3; les sommets du triangle coïncident avec les points doubles, ou centres de rotation S_1, S_2, S_3 des trois couples F_2 et F_3, F_3 et F_1, F_1 et F_2.

Réciproquement (*), trois figures égales F_1, F_2, F_3. situées

(*) Cette réciproque est connue. (Voir *Nouvelles Annales*, 1882, p. 296.) Dans cet article, Halphen prend, pour point de départ, ce théorème donné par M. Cyparissos Stéphanos dans le *Bulletin de la Société Philomatique* (7e série, tome VI, p. 13). L'intérêt de la question, ici posée, réside dans la méthode qui est indiquée pour arriver à la proposition, en considérant celle-ci comme une proposition réciproque.

d'une manière arbitraire sur un plan, coïncident avec les symétriques d'une même figure F_0, prises respectivement avec trois droites qui sont les côtés du *triangle de similitude* $S_1S_2S_3$ des trois figures égales. (*G. Tarry.*)

617. — On donne une circonférence de centre O et une droite Δ.

D'un point A, mobile sur Δ, on mène les tangentes AB, AC et l'on trace la circonférence Δ' circonscrite à ABC. La tangente en O, à Δ', coupe Δ en un point D; de D, on peut mener à Δ une autre tangente DI. Quel est le lieu de I?

(*G. L.*)

618. — On considère un triangle ABC. Sur BC comme diamètre on décrit un cercle Δ qui coupe: AB, en P; AC, en Q. La polaire A par rapport à Δ coupe le cercle APQ en deux points R, R'. L'une des droites AR, AR', est la hauteur correspondant à BC; l'autre est la médiane.

(*G. L.*)

619. — On donne un triangle *abc*. On mène la bissectrice intérieure de l'angle de ce triangle dont le sommet est *a*; cette droite coupe *bc* au point *p*. On mène *pm* parallèlement à *ac* et *cm* perpendiculairement à *ap*: ces deux droites se coupent en *m*. Démontrer que *am* est une médiane du triangle. (*Mannheim.*)

ERRATA

Page 47, ligne 16, remplacer le mot *Centre* par *point de contact avec* FF'.
Page 48, énoncé 606, il faut: *le point* D *est le centre des symédianes* (la lettre D est *tombée* à l'impression).

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 3674-2-95.

QUESTIONS D'ENSEIGNEMENT

Par Mme Ve **F. Prime.**

(*Suite*, voir page 49.)

B. *Démonstration de la formule*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Observons que l'on a

(1) $$\cos\alpha - \cos\alpha = 0,$$

et

(2) $$\sin\alpha - \sin\alpha = 0,$$

quelle que soit la valeur de α.

Or ces identités sont équivalentes aux suivantes

(1′) $$\sin\alpha . \cos\frac{3\pi}{2} + \cos\alpha + \cos\alpha . \cos\pi = 0,$$

(2′) $$\sin\alpha . \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\alpha . \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

ou encore à

(1″) $$\sum_1^3 r_i \cos\alpha_i = 0,$$

(2″) $$\sum_1^3 r_i \cos\left(\alpha_i + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

si $r_1 = \sin\alpha$, $r_2 = 1$, $r_3 = \cos\alpha$,

$\alpha_1 = \frac{3\pi}{2}$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \pi$.

Le théorème de Laisant est donc applicable à ces identités et l'on a, pour toute valeur de β,

$$\sin\alpha . \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right) + \cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha . \cos(\pi + \beta) = 0,$$

d'où $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha . \sin\beta.$$

C. *Application de la théorie des projections à la géométrie analytique à deux dimensions.*

1. — Les coordonnées cartésiennes du point M dans les axes $x_1 x$, $y_1 y$, d'angle θ, sont, par définition, les projections d'angle θ du vecteur $\overline{OM}$ sur ces deux axes.

L'angle α que la direction OM fait avec $x_1 x$ a été défini

précédemment; l'angle β que la même direction fait avec y_1y est défini par la formule

$$\alpha + \beta = \theta + 2k\pi.$$

C'est l'angle dont $\overline{OM}$ doit tourner autour de O, de droite à gauche, pour coïncider avec y_1y.

2. — Si $\overline{OM} = 1$, les coordonnées de M sont les coefficients directeurs de la direction OM ; en les appelant λ, μ, on a

$$\lambda = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

Il en résulte que

(1) $$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1.$$

3. — Prenons sur l'axe OM le vecteur $\overline{ON} = r$ et multiplions les deux membres de (1) par r^2 ; il vient ainsi

$$(\lambda r)^2 + (\mu r)^2 + 2(\lambda r).(\mu r)\cos\theta = r^2.$$

Mais, si x et y sont les ceordonnées de N, on a

$$x = \lambda r, \qquad y = \mu r,$$

d'où $$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta.$$

Cette formule est celle qui donne la distance d'un point à l'origine.

4. — Si $(x_1.y_1)$, $(x_2.y_2)$ sont les coordonnées des points A_1, A_2, le contour OA_1A_2O projeté sur les axes conduit aux deux identités

$$(\overline{A_1A_2})_x = x_2 - x_1,$$

et $$(\overline{A_1A_2})_y = y_2 - y_1.$$

5. — Considérons, sur la droite A_1A_2, un troisième point A_3 de coordonnées x_3, y_3 et ayant attribué un sens à la droite A_1A_2, désignons, par λ, μ, ses coefficients directeurs, par r_1 le vecteur $\overline{A_1A_3}$ et par r_2 le vecteur $\overline{A_3A_2}$. La position du point A_3 sur l'axe A_1A_2 est alors entièrement déterminée par la valeur k du rapport $\frac{r_1}{r_2}$. Déterminons les coordonnées de A_3 en fonction de k

On a $$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda r_1}{\lambda r_2} = \frac{(r_1)}{(r_2)_x} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_3},$$

d'où

(2) $$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}.$$

On trouverait de même

(3) $$y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

6. *Remarque.* — La démonstration précédente suppose $\lambda \neq 0$; si $\lambda = 0$, A_1A_2 est parallèle à y_1y, $x_1 = x_2 = x_3$ et la formule (1) est évidente.

7. *Rotation des axes autour de l'origine.* — Soient OX, OY les nouveaux axes définis par les angles α_1, α_2 qu'ils font avec ox. Posons

$$\lambda_1 = \frac{\sin(\theta - \alpha_1)}{\sin\theta}, \qquad \mu_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\theta},$$

$$\lambda_2 = \frac{\sin(\theta - \alpha_2)}{\sin\theta}, \qquad \mu_2 = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\theta},$$

et soient $X = \overline{OP}$, $Y = \overline{PM}$ les coordonnées d'un point M dans les nouveaux axes, x, y les coordonnées dun même point dans les anciens axes.

On a, en projetant parallèlement à l'ancien axe des y,

$$(\overline{OM})_x = (\overline{OP})_x + (\overline{PM})_x.$$

Mais $(\overline{OM})_x = x$, $\quad (\overline{OP})_x = \lambda_1 X$, $\quad (\overline{PM})_x = \lambda_2 Y$

donc $$x = \lambda_1 X + \lambda_2 Y,$$

et $$y = \mu_1 X + \mu_2 Y.$$

8. *Équation de la ligne droite.* — Sachant qu'une transformation de coordonnées cartésiennes n'altère pas le degré d'une équation algébrique, on démontre facilement que toute ligne droite peut être représentée par une équation du premier degré. Mais les démonstrations du théorème réciproque sont généralement assez longues; je crois que la suivante est la plus simple qu'il soit possible de proposer.

Soit $$Ax + By + C = 0$$
l'équation considérée. Nous pouvons y supposer les coefficients A, B différents de zéro: car si l'un d'eux était nul, l'équation représenterait évidemment une parallèle à l'un des axes coordonnés et si tous deux étaient nuls, l'équation serait impossible ou indéterminée, selon les valeurs données à C.

Donnons à x les deux valeurs arbitraires x_1, x_2 et soient y_1, y_2 les valeurs correspondantes de y fournies par (1). Ces

valeurs des y sont finies, déterminées et distinctes en vertu des hypothèses faites sur A et B. Les deux points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ appartiennent donc au lieu de l'équation (1).

Prenons un point quelconque $A_3(x_3, y_3)$ sur la droite A_1A_2 et désignons par k le rapport suivant lequel il partage le segment A_1A_2 ; nous avons

$$x_3 = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \qquad y_3 = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k},$$

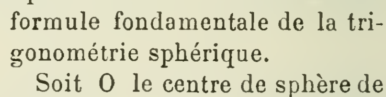
d'où

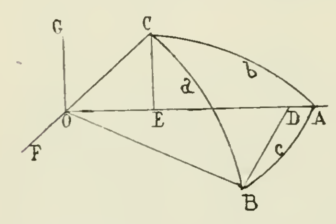
$$Ax_3 + By_3 + C = 0.$$

Tous les points de A_1A_2 appartiennent donc au lieu défini par l'équation (1). D'autre part, un point non situé sur A_1A_2 ne peut pas appartenir au lieu, sinon l'équation (1) qui est de premier degré en y, devrait, pour une seule valeur de x, donner deux valeurs de y, ce qui est impossible.

D. *Les projections dans l'espace.*

1. Dans l'espace, les projections sur un axe se font par des plans parallèles à un plan donné. Tous les théorèmes démontrés au § A sont applicables à ces projections, à l'exception des nos 12 et 14.

2. Comme application, proposons-nous de démontrer la 
formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.



Soit O le centre de sphère de rayon égal à l'unité sur laquelle est tracé le triangle sphérique ABC. Construisons, au point O, l'angle plan FOG de dièdre A et prenons OF, OG, OA, OB, OC comme axes positifs. Les coordonnées de point C dans les axes OA, OG sont

$$\overline{OE} = \cos b, \qquad \overline{EC} = \sin b\,;$$

ou a de même

$$\overline{OD} = \cos c, \qquad \overline{DB} = \sin c.$$

On a

$$(\overline{OB})_{oc} = (\overline{OD})_{oc} + (\overline{DB})_{oc}.$$

Mais si les projections sont orthogonales :

$$(\overline{OB})_{oc} = \cos a, \quad (\overline{OD})_{oc} = \cos c . \cos b, \quad (\overline{DB})_{oc} = \sin c . \cos(\widehat{OF, OC})\,;$$

d'où $\cos a = \cos b . \cos c + \sin c . \cos(\widehat{OF,OC})$.

D'autre part, $(\overline{OC})_{OF} = (\overline{OE})_{OF} + (\overline{EC})_{OF}$;

or $(\overline{OC})_{OF} = \cos(\widehat{OC,OF}) = \cos(\widehat{OF,OC})$,

$(\overline{OE})_{OF} = 0$ et $(\overline{EC})_{OF} = \sin b . \cos(\widehat{OG,OF}) = \sin b \cos A$.

On a donc enfin

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A.$$

(A suivre.)

RECTIFICATION APPROCHÉE DU CERCLE

Par M. **M. d'Ocagne.**

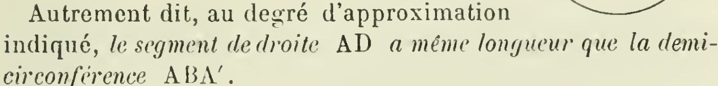
Dans une communication présentée récemment à la Société mathématique de France, M. Bioche, observant que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1463 = \pi + 0,0047,$$

en déduisait un procédé approché de rectification du cercle consistant à construire géométriquement $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et à ajouter les segments ainsi obtenus.

Je ferai observer ici qu'il est très facile de construire directement $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Dans le cercle ABA′ *dont le rayon est pris pour unité, tirons le rayon* OB *à* 45° *sur* OA′. *La parallèle à* OA′, *menée par* B, *coupe la tangente en* A′ *au point* C. *La bissectrice de l'angle* COA *coupe la tangente en* A *au point* D, *tel que* AD $= \sqrt{2} + \sqrt{3}$.



Autrement dit, au degré d'approximation indiqué, *le segment de droite* AD *a même longueur que la demi-circonférence* ABA′.

La démonstration est des plus faciles. On a

$$\operatorname{tg} AOD = \operatorname{tg} \frac{AOC}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos AOC}{1 + \cos AOC}}.$$

Or, $$\cos AOC = - \cos A'OC = - \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A'OC}}.$$

Mais, d'après la construction

$$\operatorname{tg} A'OC = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc
$$\cos AOC = -\sqrt{\frac{2}{3}},$$

et
$$\operatorname{tg} AOD = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}},$$

ou, en multipliant haut et bas par $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,

$$\operatorname{tg} AOD = \sqrt{3}+\sqrt{2},$$

C. Q. F. D.

APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
A LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

par **E.-N. Barisien.**

Soit à résoudre le système de deux équations (*)

(1) $$xy = a^2,$$

(2) $$(x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2-y^2).$$

Si l'on cherche à résoudre directement ces équations, on aboutit à une équation du 8e degré en x qui, étant bicarrée, peut se ramener à une équation du 4e degré : mais la résolution de celle-ci offre des difficultés.

Posons $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ (effectuant ainsi la transformation du système cartésien, dans le système des coordonnées polaires), nous avons

(3) $$\rho^2 = \frac{2a^2}{\sin 2\theta},$$

(4) $$\rho^2 = 4a^2\cos 2\theta,$$

(*) On voit que (1) représente une hyperbole équilatère et (2) une lemniscate de Bernoulli.

et, par conséqnent,

$$2 \sin 2\theta \cos 2\theta = 1,$$
$$\sin 4\theta = 1,$$

Prenons la solution $\theta = \frac{\pi}{8}$,

et alors $\rho = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}} = a\sqrt{2\sqrt{2}}.$

Nous avons donc

$$x = \rho \cos\theta = a\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot \cos\frac{\pi}{8} = a\sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}},$$

ou bien $x = a\sqrt{\sqrt{2}+1}.$

Les courbes (3) et (4) étant tangentes, il en résulte que les huit valeurs de x de l'équation formée par l'élimination de y entre (1) et (2), sont composées des quatre racines doubles

$$x_1 = a\sqrt{\sqrt{2}+1}, \qquad x_3 = a\sqrt{-(\sqrt{2}-1)},$$
$$x_2 = -a\sqrt{\sqrt{2}+1}, \qquad x_4 = -a\sqrt{-(\sqrt{2}-1)}.$$

Les valeurs correspondantes de y sont

$$y_1 = a\sqrt{\sqrt{2}-1}, \qquad y_3 = a\sqrt{-(\sqrt{2}+1)},$$
$$y_2 = -a\sqrt{\sqrt{2}-1}, \qquad y_4 = -a\sqrt{-(\sqrt{2}+1)}.$$

SUR LE DEPLACEMENT
DES FIGURES SEMBLABLES

Par M. **G. Tarry.**

Théorème. — *Deux figures directement ou inversement semblables, qui ne sont pas homothétiques, ont toujours une droite double sur laquelle les divisions semblables formées par les points homologues des deux figures sont de même sens ou de sens contraires, suivant que ces figures sont directement ou inversement semblables.*

Pour éliminer tout cas particulier, nous considérons comme homothétiques deux figures directement égales qui peuvent être mises en coïncidence par un mouvement de trans-

lation parallèle et deux figures inversement égales qui son symétriques par rapport à un plan.

Soient F, F′ deux figures semblables et p, p' deux points homologues dans ces figures. Construisons la figure F″ directement égale à la figure F, directement ou inversement homothétique à la figure F′, suivant que les figures F et F′ sont directement ou inversement semblables, et telle que le point p, considéré dans la figure F″, ait pour homologue le point p' dans la figure F′.

Les figures directement égales F″ et F, qui ont un point double p, peuvent être amenées en coïncidence par une rotation autour d'un axe qui passe par p, et tous les points de cet axe sont des points doubles des figures F″ et F.

Considérons dans la figure F″ des droites a'', b'', c'',... parallèles à cet axe. Ces parallèles ont pour homologues, dans les figures F et F′, les droites $a, b, c,\dots$ et $a', b', c'\dots$, toutes parallèles à cet axe. Les projections de ces droites sur un plan perpendiculaire à leur direction déterminent trois figures A″B″C″, ABC, A′B′C′. Les figures A″B″C″ et ABC sont directement égales et ont un centre de rotation; les figures A″B″C″ et A′B′C′ sont homothétiques. Par suite, les figures ABC et A′B′C′ sont directement semblables et ont un point double X, appelé centre de similitude. On voit aisément que la perpendiculaire x, menée à ce plan par le point double X, est une droite double des figures semblables F et F′. La droite double disparaît à l'infini dans le cas seulement où les triangles ABC, A′B′C′ sont égaux et ont leurs côtés parallèles de même sens.

Les divisions formées par les points homologues sur des droites homologues parallèles à la droite double, que j'appellerai *axe de similitude*, sont égales et de même sens dans les figures F″ et F, semblables dans les figures F″ et F′ et de même sens ou de sens contraires, suivant que les figures F″ et F′ sont directement ou inversement homothétiques. Par conséquent, les divisions semblables formées sur l'axe de similitude par les points homologues des figures F et F′ sont de même sens ou de sens contraires, suivant que ces deux figures sont directement ou inversement semblables.

Le théorème est donc démontré.

Si les deux figures F et F′ sont semblables, sans être égales, leur droite double ne peut être à l'infini, et les deux divisions homologues marquées sur leur axe de similitude ont toujours un point double. Le plan mené par ce point double perpendiculairement à l'axe de similitude est évidemment un plan double. On a donc le théorème suivant, qui a été démontré autrement par M. Dorlet (*J. E.*, 1894, p. 241).

Deux figures directement ou inversement semblables ont toujours un plan double, une droite double (axe de similitude) perpendiculaire au plan double, et un point double qui est le pied de cette perpendiculaire. Par un mouvement de rotation autour de l'axe de similitude on peut placer les deux figures semblables de manière à être homothétiques.

Si les deux figures sont inversement égales, leur droite droite double peut disparaître à l'infini. Nous distinguerons quatre cas :

1° Les plans perpendiculaires aux milieux des droites qui joignent les couples de points homologues ont en commun un point unique X.

Les deux figures inversement égales ont un point double X, une droite double et un plan double. Par une rotation autour de la droite double, on peut rendre les deux figures symétriques, soit par rapport au point X, soit par rapport au plan double.

2° Les plans perpendiculaires passent par une même droite x.

Les deux figures ont une droite double x, dont tous les points sont des points doubles.

Tous les plans perpendiculaires à la droite double sont des plans doubles, qui coupent les figures considérées suivant deux figures planes symétriques.

On conclut de là que les deux figures données sont symétriques par rapport à un plan, et l'on rentre dans le cas suivant.

3° Les plans perpendiculaires se confondent en un seul.

Les deux figures sont symétriques par rapport à ce plan, et par une rotation de 180° autour d'une droite perpendicu-

laire au plan de symétrie on place les deux figures symétriquement par rapport au pied de la perpendiculaire.

4° Les plans perpendiculaires n'ont aucun point commun. Les deux figures ont encore un plan double qui les coupe suivant deux figures égales dont les côtés homologues sont parallèles de même sens. On peut, par une translation parallèle, rendre les deux figures symétriques par rapport au plan double, et par une rotation de 180° autour d'une perpendiculaire quelconque au plan double, les placer en symétrie par rapport à un point; ce point, situé dans le plan double, ne peut coïncider avec le pied de la perpendiculaire.

En résumé : *Deux figures inversement égales peuvent toujours être placées en position symétrique par rapport à un plan ou un point, soit par un mouvement de rotation autour d'un axe fixe, soit par un mouvement de translation parallèle.*

Enfin, considérons le cas où les deux figures sont directement égales. Ces figures ont toujours une droite double, si elles ne peuvent être mises en coïncidence par un mouvement de translation parallèle. Les divisions égales déterminées sur la droite double par les points correspondants sont de même sens. Communiquons à l'une de ces figures un mouvement de translation parallèle à la droite double, de façon qu'un de ses points situés sur cette droite vienne coïncider avec son correspondant dans l'autre figure. Dans cette position, les deux figures ont en commun, point par point, la droite double, et par une rotation autour de cette droite l'une des figures peut être amenée en coïncidence avec l'autre. Il est permis d'effectuer ces deux mouvements simultanément et uniformément. D'où il résulte que

Tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu par un mouvement hélicoïdal autour d'une certaine droite fixe.

M. Poulain a fait ressortir le défaut de rigueur de la démonstration classique, qui établit l'existence du point double (centre de similitude) de deux figures directement semblables situées dans un même plan (*J. S.* 1891, p. 193).

Nous compléterons la partie de cette note relative aux axes

de similitude en indiquant une construction plus rationnelle du centre de similitude.

Soient AB, A′B′ deux segments homologues et X le centre de similitude cherché.

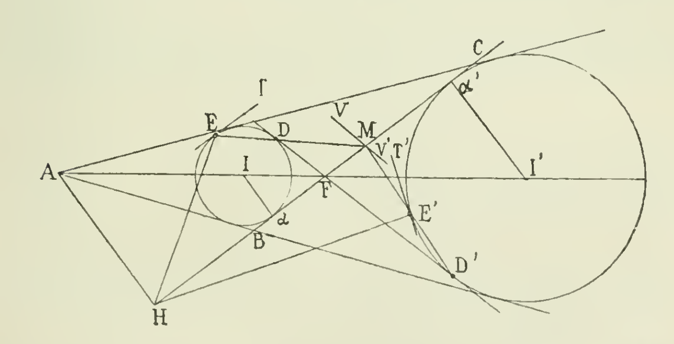
On connaît le rapport des deux segments XA et XA′, égal au rapport des deux segments homologues AB et A′B′, et l'angle des semi-droites XA et XA′, égal à l'angle formé par les semi-droites AB et A′B′. Le problème est donc ramené à construire un triangle AXA′ de similitude donnée, connaissant l'un de ses côtés AA′.

Il résulte de cette construction que les perpendiculaires élevées aux milieux de deux segments égaux AB et A′B′ se coupent en un point X tel que les deux triangles XAB et XA′B′ soient directement égaux, et non inversement égaux.

LE THÉORÈME DE FEUERBACH

par M. **L. Vautré.**

Considérons le triangle ABC. Soient α et α' les points de contact de BC avec le cercle inscrit I et le cercle ex-inscrit I′, H le pied de la hauteur, M le milieu de BC. Menons



la tangente commune DD′, puis les sécantes MDE, ME′D′, les tangentes ET et E′T′, enfin V′MV, parallèle à DD′ et par conséquent antiparallèle à BC par rapport à l'angle A.

Les droites DD′ et $\alpha\alpha'$ se coupent en F sur la bissec-

trice AII′, et la division harmonique AFII′ se projette suivant une division harmonique $HF\alpha\alpha'$. On sait d'ailleurs que M est le milieu du segment $\alpha\alpha'$. Donc

$$MH.MF = \overline{M\alpha}^2 = MD.ME.$$

Il en résulte que le quadrilatère HFDE est inscriptible. Par conséquent;

$$\widehat{MHE} = \widehat{FDM},$$

d'où $\widehat{MHE} = \widehat{DMV}$, et $\widehat{MHE} = \widehat{DET}$

Ces deux relations prouvent : 1° que le cercle Δ qui, passant aux points H et M, admet pour tangente MV (autrement dit le cercle des neuf points), passe au point E; 2° que ce cercle Δ est tangent à la droite EΓ, et par conséquent au cercle I.

On prouverait de même que les cercles Δ et I′ se touchent au point E′.

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin**

376. — *Trouver sept triangulaires consécutifs dont la somme soit un triangulaire.*

On est amené à résoudre en nombres entiers :

$$z^2 - 7y^2 = 106.$$

Cette équation a une infinité de solutions, il en est donc de même de la question proposée ; toutes les solutions sont données par les suites :

$$y = 1, 15, 63, 243, 1\,005, 3\,873, \ldots$$
$$z = 13, 41, 167, 643, 2\,659, 10\,247, \ldots$$
$$y_n = 16y_{n-2} - y_{n-4}$$
$$z_n = 16z_{n-2} - z_{n-4}$$

x étant le plus petit des triangulaires cherchés, on a : $2x = y - 7$, et toutes les solutions sont fournies par la suite :

$$x = 4, 28, 118, 499, 1\,933, \ldots$$
$$x_n = 16x_{n-2} - x_{n-4} + 49.$$

377. — *On ne saurait trouver* n *triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré,* n *ayant une des valeurs suivantes :*

5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21.

378. — *Trouver trois triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.*

Ce problème conduit à l'équation

$$8k^2 - 5 = 3r^2,$$

(Voir J. M. E., 1894, Ex. 332) qu'il faut résoudre en nombres entiers.

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés, on a toutes les solutions par la suite :

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 14, \quad x_3 = 63, \quad x_4 = 152, \quad \ldots$$
$$x_{2n+1} = 5x_{2n} - 2x_{2n-1} + 3,$$
$$x_{2n} = \frac{1}{2}\left(5x_{2n-1} - x_{2n-2} + 3\right).$$

379. — *Trouver quatre triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.*

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation bien connue :

$$2k^2 - 1 = y^2.$$

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés, on a toutes les solutions par les formules :

$$x = y - 2,$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = 39, \quad \ldots \quad x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2} + 8.$$

380. — *Trouver onze triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.*

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$22k^2 - 39 = y^2$$

qui a une infinité de solutions; il en est donc de même du problème proposé.

$$2x = y - 11.$$

Les premières valeurs de x sont :

13.46.229. ...

x étant le rang du plus petit des triangulaires cherchés.

381. — *Trouver 13 triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.*

L'équation est alors $y^2 + 55 = 26k^2$

qui admet une infinité de solutions entières. Si x est le rang du plus petit des triangulaires considérés. on a :

$$2x = y - 13.$$

Les premières valeurs de x sont :

3.29.75.998.3 624.....

382. — *Trouver 22 triangulaires consécutifs dont la somme soit un carré.*

Il faut résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$y^2 + 10 = 11k^2.$$

Toutes les solutions sont données par la suite :

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 23, \quad y_2 = 43, \quad y_3 = 461, \quad y_4 = 859.....$$
$$y_n = 20y_{n-2} - y_{n-4},$$

x étant le rang du plus petit des triangulaires considérés.

$$x = 2y - 11.$$

On a donc

$$x_1 = 35, \quad x_2 = 75, \quad x_3 = 911, \quad x_4 = 1\,707.....$$
$$x_n = 20x_{n-2} - x_{n-4} + 198.$$

383. — *Trouver 23 triangulaires successifs dont la somme soit un carré.*

On est amené à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$46k^2 - 7 = y^2,$$

qui a une infinité de solutions. Si x est le rang du plus petit des triangulaires considérés,

$$2x = 5y - 23.$$

Les premières valeurs de x sont :

56.7856.3 293 081.....

BACCALAURÉATS

Académie de Montpellier.

I. — On donne le côté a d'un triangle, l'angle opposé A et la médiane m relative à ce côté. Calculer les deux autres côtés. Discussion.

II. — Trouver tous les arcs x qui satisfont à l'équation :

$$\operatorname{tg} x + \cos x = \frac{7}{253}.$$

I. — Étant donné un point A et une droite XY, déterminer un triangle ABC, sachant que le côté BC est sur XY et a une longueur donnée $2a$, et que la somme AB + AC des deux autres côtés est égale à une quantité donnée S.

II. — Étudier les variations de la fraction :

$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

III. — Résoudre le système d'équations :

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a, \qquad \cos x + \cos y = b.$$

Discuter le problème (*).

Académie de Nancy.

Questions à choisir. — *(a)* Démontrer que chaque face d'un trièdre est moindre que la somme des deux autres.

(b) Démontrer que si l'on prolonge les arêtes d'un angle trièdre quelconque au delà de son sommet, on forme un nouvel angle trièdre qui ne peut lui être superposé bien qu'il soit composé des mêmes éléments.

(c) Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits.

Problème. — On donne le rayon de base a et la hauteur h d'un cône circulaire droit. Calculer le rayon x et la hauteur y d'un cylindre ABCD inscrit dans ce cône et tel que sa surface totale soit égale à celle d'une sphère de rayon a. a étant donné, comment doit être choisi h pour que le problème soit possible. Discuter.

(*) J'insérerai bien volontiers la solution de ce problème, qui me paraît fort difficile, si quelque correspondant veut bien me l'adresser. G. L.

Académie de Poitiers.

I. — 1° Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire irréductible $\frac{a}{b}$ puisse être convertie exactement en fraction décimale.

2° Par le foyer d'une parabole, on mène une droite inclinée d'un angle α sur l'axe de la courbe et rencontrant celle-ci en deux points MM'. Connaissant la distance p du foyer à la directrice, on demande de déterminer : 1° la hauteur au-dessus de l'axe des points de rencontre des tangentes en M et M' avec la directrice; 2° les distances au foyer des points de rencontre de ces tangentes avec l'axe de la courbe.

Questions à choisir. II. — *(a)* Équilibre de la poulie mobile.

(b). — Couple. Composition des couples.

(c). — Equilibre des forces appliquées à un corps solide mobile autour d'un axe fixe.

Problème. — Inscrire dans une demi-circonférence un trapèze de péri mètre donné. Discussion.

III. — Une demi-circonférence étant partagée en cinq parties égales, on demande de calculer, en fonction du rayon R, les cordes qui sous-tendent les arcs égaux à une, deux, trois et quatre divisions. Relation de ces cordes entre elles.

IV. — Résoudre l'équation :

$$\operatorname{tg} x - \cos x = \frac{1}{m}. \qquad \text{Valeur de } x \text{ pour } m = \frac{1}{2}.$$

Académie de Rennes.

I. — 1° Plans perpendiculaires. Définition.

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires est que l'un d'eux contienne une perpendiculaire à l'autre.

Conséquence relative à l'intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième.

2° On donne trois droites OA, OB, OC, faisant entre elles les angles $AOC = \alpha$, $BOC = \beta$ et un point C à la distance $OC = a$ du point O. Mener par ce point une droite CBA telle que l'on ait $CB \times CA = CO^2$. Valeur de l'angle $ACO = x$. On formera les expressions des longueurs CB et CA en fonction de x et des données.

II. — 1° Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$. Nombre et condition de réalité des racines.

2° On donne une circonférence O de rayon r, un point A dont a est la distance au centre, une perpendiculaire BB' à OA dont b est la distance de ce même centre.

Mener par A la droite ANM telle que le rapport de AM à AN soit le nombre donné K. Calculer ces segments ainsi que les angles OAM AOM. Limites extrêmes de K quand a, b, r restent fixes.

III. — 1° *Questions à choisir.* *(a)* Résolution des équations simultanées

$$ax + by = c \qquad a'x + b'y = c'.$$

Composition des formules. Discussion.

(b) Exprimer $\sin x$ et $\cos x$: 1° en $\operatorname{tg} x$; 2° en $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Expliquer *a prior* les nombres de valeurs obtenues dans les deux cas.

(c) Démontrer la suite des propositions d'où il résulte que tout nombre est décomposable, et d'une seule manière en facteurs premiers.

2° *Problème.* On donne un demi-cercle ACB de diamètre $AB = 2R$. Comment faut-il mener la corde BC pour que dans la rotation de la figure autour de AB les deux proportions du demi-cercle déterminées par cette corde engendrent des volumes équivalents?

Académie de Toulouse.

I. — On donne un triangle ABC rectangle en A. Trouver sur l'hypoténuse un point D tel que la somme $DE + DF$ des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux autres soit égale à une longueur donnée

Discuter le problème.

II. — 1° Réduction des forces à deux, dont l'une est appliquée en un point pris à volonté.

2° Déterminer les valeurs maximum et minimum de

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1},$$

x variant de $-\infty$ à $+\infty$.

Académie de Paris (21 juillet 1894).

I. — *Problème obligatoire*:

Calculer les côtés d'un triangle rectangle, connaissant sa surface S et la somme $\frac{\pi a^2}{3}$ des volumes engendrés par le triangle tournant successivement autour des deux côtés de l'angle droit.

Trois questions à choisir :

Énoncer et démontrer la propriété fondamentale :

(a) De la tangente à l'ellipse;

(b) De la tangente à la parabole;

(c) De la sous-normale de la parabole.

BIBLIOGRAPHIE

La librairie Belin frères (52, rue de Vaugirard,vient de faire paraître des **Éléments de géométrie**, à l'usage des classes de lettres, par M. Ch. Bioche, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques.

Le public particulier auquel s'adresse un pareil volume demande, avant tout, que les matières qui y sont exposées soient restreintes aux limites fixées par les programmes et qu'elles y soient clairement établies. Le livre de M. Bioche nous a paru répondre complètement à cette exigence. De nombreux exercices accompagnent les différents chapitres et nous ne saurions trop les recommander aux débutants. Quelques-uns sont numériques et leur conviennent tout particulièrement. On ne comprend bien les idées mathématiques, au moins au début, que si l'on fait souvent des *applications numériques*.

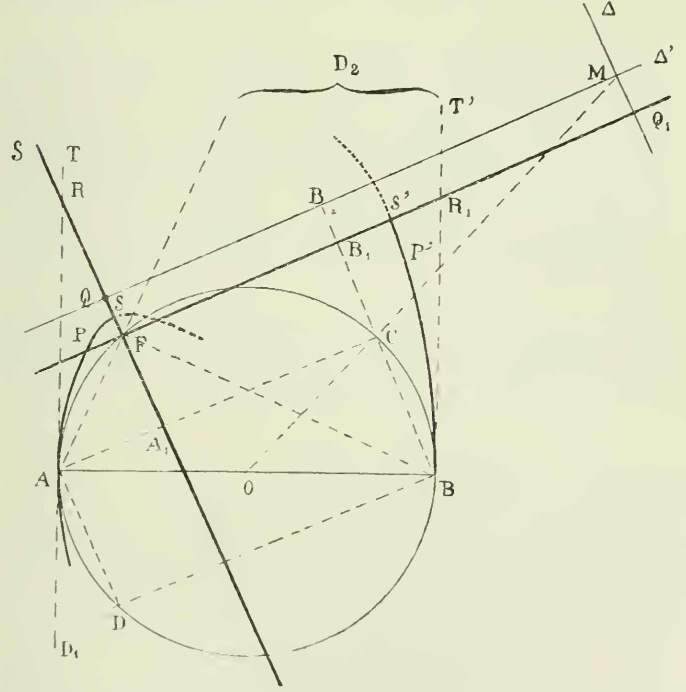
QUESTION 571

Solution par M. Davidoglou.

Soit F *un point fixe sur une circonférence. On construit les deux paraboles tangentes à la circonférence aux extrémités d'un diamètre et ayant le point* F *comme foyer. Démontrer que leurs directrices sont perpendiculaires l'une sur l'autre. Chercher le lieu de leur point d'intersection lorsque le diamètre varie.* (Droz-Farny.)

Notations :

T, T′, les tangentes au cercle donné, aux extrémites A et B du diamètre AOB.



D le point de rencontre des parallèles AD et BD, aux axes δ, δ' des paraboles D et D′.

D_1 et D_2 les points de rencontre de BD et AF respectivement avec T et T′.

M l'intersection des directrices Δ et Δ' et S, S' les sommets des paraboles F et F'.

R et R_1 les points d'intersections de δ et δ' respectivement avec T et T'.

Q et Q_1 les points d'intersections de δ et δ' respectivement avec Δ et Δ'.

AA_1, BB_1 les perpendiculaires sur δ et δ' et c leur point d'intersection.

1° Il suffit de montrer que AD et BD sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

On a, angulairement : $\widehat{FD_2B} = \widehat{FAR} = \widehat{DAD_1}$ et de même $\widehat{FBD_2} = \widehat{DD_1A}$; cela entraîne $\widehat{ADD_1} = \widehat{D_2FB} = 90°$.

C. Q. F. D.

2° Prolongeons BB_1 jusqu'à sa rencontre en B_2 avec Δ. Les triangles FAR et BFR, étant évidemment isoscèles, on a : $BC = AF = RF = RA_1 = CB_2$ et $AC = FB = FR_1 = B_1Q_1 = MB_2$, ce qui montre que les triangles MCB_2 et TBC sont égaux et, comme $R_2CM = OBC = OCB$, la droite MC passe par le centre O du cercle donné et l'on a : $OM = 3OB = BR$. — Le lieu cherché est donc un cercle de centre O et de rayon 3R.

Nota. — Solution analogue par M. Aletrop. Nous avons aussi reçu de bonnes solutions de MM. Tzitzeica, Vazou, Barisien; elles renfermaient des développements analytiques et géométriques très intéressants, mais dépassant le niveau des mathématiques élémentaires.

QUESTION 573

Solution par A. Droz-Farny.

Soient M *et* m *les extrémités de deux diamètres conjugués d'une ellipse de centre* O. *On prend sur la normale en* M *deux points* N *et* N' *tels que* $MN = MN' = Om$ *et sur la normale en* m, *deux points* n *et* n' *tels que* $mn = mn' = OM$. *On suppose que* n, m *sont du même côté par rapport au grand axe, et que les points* N *et* n *sont aussi placés du même côté par rapport aux tangentes en* M *et* m *On propose d'établir les propriétés suivantes :*

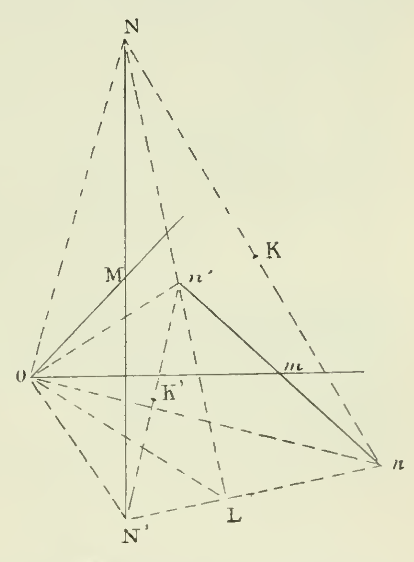
1° Les droites Nn', N'n *sont perpendiculaires: de plus, on a* $Nn' = N'n = Mm\sqrt{2}$;

2° *Les droites* Nn′, N′n, *et la parallèle à la corde* Mm, *menée par* O, *sont concourantes;*

3° *La somme des carrés des longueurs* Nn *et* N′n′ *est égale au carré de la diagonale du rectangle des axes;*

4° *Les droites qui joignent le point* O *au milieu* K *de* Nn *et au milieu* K′ *de* N′n′ *sont également inclinées sur les axes de l'ellipse.* (E.-N. Barisien.)

La normale en M est la perpendiculaire abaissée de ce point sur le diamètre Om conjugué à OM. Le triangle OMN est égal au triangle Omn, car $OM = mn$, $MN = Om$ et angle $OMN = Omn$. Il en résulte $ON = On$. Ces triangles étant semblablement disposés et deux des côtés du premier étant respectivement perpendiculaires sur les deux côtés correspondants du second, il en est de même des troisièmes côtés : donc ON est perpendiculaire sur On.



De l'égalité des triangles OMN′ et Omn' on déduit de même que les côtés ON′ et On'' sont égaux et perpendiculaires l'un sur l'autre. Les triangles $ON'n$ et ONn' sont donc aussi égaux, et par conséquent Nn' et Nn' sont égaux et perpendiculaires l'un sur l'autre.

Il en résulte immédiatement que la figure KmK' est un carré; donc

$$\overline{MK}^2 + \overline{Km}^2 = \overline{Mm}^2.$$

d'où

$$\overline{Nn'}^2 = 2\overline{Mm}^2,$$

$$Nn' = N'n = Mm\sqrt{2}.$$

2. Soit L le point d'intersection de Nn' et $N'n$; les circonférences décrites sur Nn et $N'n'$ comme diamètres se

coupent aux points O et L ; donc OL est perpendiculaire sur KK′ et par conséquent parallèle à Mm.

3. On a : $$\overline{\mathrm{N}n}^2 = 2\overline{\mathrm{O}n}^2,$$
et $$\overline{\mathrm{N}'n'}^2 = 2\overline{\mathrm{O}n'}^2.$$
Donc $$\mathrm{N}n^2 + \mathrm{N}'n'^2 = 2(\mathrm{O}n^2 + \mathrm{O}n'^2) = 4(\mathrm{O}m^2 + mn^2)$$
$$= 4(\overline{\mathrm{OM}}^2 + \overline{\mathrm{O}m}^2) = 4(a^2 + b^2).$$

4. Il résulte de la construction des axes d'une ellipse, quand on connaît en grandeur et direction deux diamètres conjugués (méthode de Chasles), que ces droites sont les bissectrices de l'angle NON′ ; OK étant incliné de 45° sur ON, et OK′ de 45° sur ON′, ces deux droites seront donc aussi également inclinées sur les axes de l'ellipse.

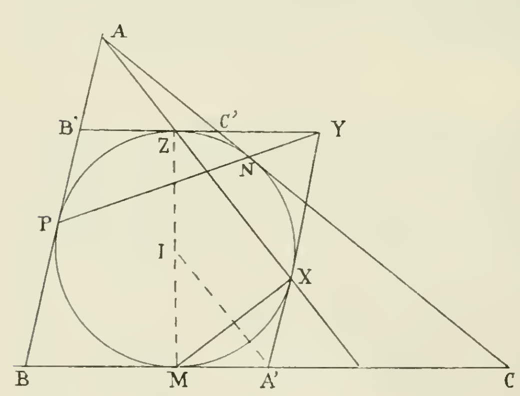
Nota. — Autres solutions par MM. Davidoglou et Vazou.

QUESTION 575

Solution par Mme Ve F. Prime.

On donne un triangle et le cercle qui lui est inscrit. On mène à ce cercle la tangente parallèle à l'un des côtés du triangle, et la tangente issue du milieu de ce côté. Démontrer que ces tangentes se coupent sur la droite qui joint les points où le cercle touche les deux autres côtés du triangle. (Mannheim.)

Soit Y le point où la corde des contacts PN du cercle I avec b et c, coupe la tangente B′C′ parallèle à BC. Si Z est le point de contact de B′C′, la polaire de Y est AZ qui coupe I pour la seconde fois en X. La polaire de X passant par Y, le théorème sera démontré si nous prouvons que A′X est tangente à I, (A′ est le milieu de BCX). Or A passe par



le point de contact du cercle ex-inscrit I_a avec BC, IA′ est donc parallèle à ZX et, par suite, perpendiculaire sur le milieu de MX; d'où...

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, Davidoglou, Droz-Farny, Joseph Dhavernas, élève au lycée Michelet, et Alfred Champion.

M. Droz-Farny observe que la droite AZX étant parallèle à la droite IA′ qui joint le centre du cercle inscrit au milieu A′ du côté BC passe par le point de Nagel du triangle. Les trois points tels que Y appartiennent donc à une droite, polaire du point de Nagel par rapport au cercle inscrit. M. Aletrop a généralisé la question en remplaçant le cercle par une conique quelconque.

QUESTION 577

Solution par M. Goyens.

On donne deux points A *et* B *sur les côtés d'un angle* O *et l'on prend sur* OA, OB *des points* A′, B′ *tels que l'on ait toujours*

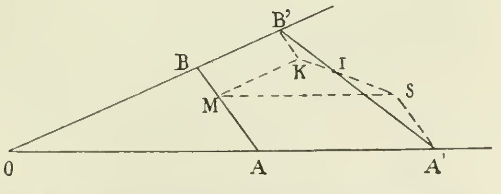
$$\frac{AA'}{BB'} = K.$$

Lieu du point I *qui divise le segment* A′B′ *dans un rapport donné* m. (Verrière.)

Soient M le point de AB tel que $\frac{MA}{MB} = m$, I le point de A′B′ tel que $\frac{IA'}{IB'} = m$. Construisons les parallélogrammes MBB′K, MAA′S. Menons IK et IS. On aura

$$\frac{MA}{MB} = \frac{SA'}{B'K} = \frac{A'I}{B'I} = m.$$

Les deux triangles IB′K, ISA′ sont semblables comme ayant un angle égal (KB′I = SA′I) compris entre deux côtés homologues proportionnels, donc KI et IS sont en ligne droite.



Le triangle MKS reste semblable à lui-même car l'angle KMS est constant et égal à l'angle O et les côtés MK = BB et MS = AA′ sont dans un rapport

constant. Le côté KS reste donc parallèle à lui-même et le point I qui partage ce côté dans un rapport constant décrit une droite passant par le sommet fixe M.

Autrement (par M. DROZ-FARNY). — Les points A′ et B′ déterminent sur les côtés de l'angle O deux ponctuelles semblables et par conséquent les droites A′B′ enveloppent une parabole tangente aux trois côtés du triangle OAB.

D'après un théorème bien connu, les points qui divisent le segment A′B′ d'une tangente variable à une parabole, compris entre deux tangentes fixes suivant un rapport donné, sont sur une ligne droite tangente aussi à la parabole. Cette proposition est un corollaire du théorème général que toute tangente variable à une conique est coupée par quatre tangentes fixes suivant quatre points de rapport anharmonique constant. Il suffit de supposer une tangente à l'infini pour obtenir le théorème énoncé.

Nota. — Autres solutions par MM. VAUTRÉ, DAVIDOGLOU et Mme Ve F. PRIME

QUESTION 578

Solution par M. A. DROZ-FARNY.

Démontrer que dans un triangle on a toujours

$$4R - r_a > (p - a)\sqrt{3}.$$

(E. Lemoine.)

Si I et Γ'_a représentent respectivement le centre du cercle inscrit et le premier point du groupe de Gergonne, on a

$$\overline{I\Gamma'_a}^2 = r'^2 - \frac{3S^2}{\delta_a^2}.$$

Il en résulte immédiatement

$$r'\delta_a > S\sqrt{3}, \qquad \text{or} \qquad r' = \frac{S}{p-a},$$

d'où

$$4R - r_a > (p - a)\sqrt{3}.$$

Remarque. — Cette inégalité peut se mettre sous la forme

$$p^2 - bc > S\sqrt{3}.$$

Nota. — MM. DAVIDOGLOU et Jean NEGRETZU, de Bucarest, nous ont adressé une solution trigonométrique de cette question.

QUESTION 580

Solution par M. VAZOU.

m_a *désignant la médiane correspondant au côté* a *d'un triangle* ABC, *et* A' *le deuxième point de rencontre de cette médiane avec la circonférence circonscrite au triangle, on a la relation*

$$3a^2 + 4m_a^2 = 12m_a.GA'$$

(G désignant le centre de gravité du triangle).

(Lauvernay.)

On a $$BM + MC = AM.MA',$$

ou $$\frac{a^2}{4} = m_a(GA' - GM) = m_a\left(GA' - \frac{m_2}{3}\right),$$

ou enfin $$3a^2 + 4m_a^2 = 12m_a.GA'.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. GOYENS, à Malines; DAVIDOGLOU, élève au lycée de Berlad; DROZ-FARNY; TZITZEICA et Jean NEGRETZU, à Bucarest; Alfred CHAMPION, et Mme Ve PRIME (*).

QUESTIONS PROPOSÉES

620. — Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C. Construire les centres A', B', C' de ces trois cercles et calculer leurs rayons en fonction des distances a, b, c, entre B et C, C et A, A et B. *(E. Lebon.)*

621. — On donne un tétraèdre quelconque. De l'un de ses sommets, on mène le plan perpendiculaire à la face opposée à ce sommet et qui contient le point de rencontre des hauteurs du triangle formant cette face. Il y a ainsi quatre plans : démontrer qu'ils se coupent au même point. *(Mannheim.)*

622. — Soient B_1 et C_1 les milieux des côtés AC et AB du triangle ABC, P un point quelconque du côté BC. Les droites PB_1 et PC_1 coupent respectivement AB et AC en B_2 et en C_2. Démontrer que la droite B_2C_2 est parallèle à AP et qu'elle coupe le côté BC en un point Q tel que

$$\frac{QC}{QB} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2.$$

(M. d'Ocagne.)

(*) On trouvera dans le n° de ce mois du *Journal de Mathématiques spéciales* une solution de la question 591 qui a été aussi proposée dans ce journal sous le n° 370.

623. – Démontrer que l'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. *(Mannheim.)*

624. — 1° Dans un triangle ABC trouver le point M pour lequel on a

$$\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AB}^2.$$

2° Dans un triangle ABC trouver le point M pour lequel on a

$$\overline{AM}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{AB}^2.$$

(E. Lemoine.)

625. — Soient H l'orthocentre d'un triangle ABC, O le centre du cercle circonscrit; les droites AH et AO coupent le côté BC respectivement aux points A′, D; soit α le point milieu de AD. Les trois droites telles que $A'\alpha$ se croisent au centre ω du cercle des neuf points. *(Droz-Farny.)*

626. — On considère le faisceau $O(AA_1A_2\ldots A_{2p}B)$ et la transversale $AA_1A_2\ldots B_{2p}B$. Si l'on désigne par $R_1R_2\ldots R_{2p}$ les rayons des cercles circonscrits aux triangles OAA_1, $OAA_2\ldots OAA_{2p}$ et par $R'_1R'_2\ldots R'_{2p}$ les rayons des cercles circonscrits aux triangles OBA_1, $OBA_2\ldots OBA_{2p}$, on a la relation

$$\frac{R_2R_4\ldots R_{2p}}{R'_1R'_3\ldots R'_{2p-1}} = \frac{R_1R_3\ldots R_{2p-1}}{R'_2R'_4\ldots R'_{2p}}.$$

(Jean Négretzu.)

ERRATA.

Page 49, ligne 18 du bas, lire *somme* au lieu de *grandeur*.
— 49, — 14 — — *un* — *axe*.
— 54, — 29 du haut, — $\sum_1^n$ — $\sum_1^{n+1}$.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 6616-3-95.

PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE

Par M. **J.-S. Mackay,**
Professeur de mathématiques à l'Académie d'Édimbourg.

NOTATIONS

Dans le triangle ABC, les points L, L' sont les pieds des bissectrices des angles en A; X est le pied de la hauteur issue de A; A' le point milieu de BC. I, I_1, I_2, I_3 sont les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits; D, D_1, D_2, D_3 les points de contact de ces cercles avec BC; et, de même, pour $E, E_1, \ldots$ $F, F_1, \ldots$

De B, on abaisse les perpendiculaires BP, BP' sur AL, AL'; et, de C, les perpendiculaires CQ, CQ'.

(1) D, D_1, P, Q sont situés sur un cercle de centre A'.
D_2, D_3, P', Q' — —

(2) Le cercle inscrit et le premier cercle exinscrit à ABC coupent le cercle DPD_1Q orthogonalement; le deuxième et le troisième cercles exinscrits coupent $D_2Q'P'D_3$ orthogonalement.

On a :

(3) $IP.IQ = r^2$, $I_1P.I_1Q = r_1^2$,
$I_2P'.I_2Q' = r_2^2$, $I_3P'.I_3Q' = r_3^2$.

(4) Si les cercles I, I_1 sont regardés comme un couple d'un système de cercles ayant même axe radical, P, Q sont les points limites du système; et P', Q' sont les points limites du système auquel appartient le couple I_2, I_3.

(5) Les triangles XPQ, XP'Q' (dont les côtés homologues sont perpendiculaires l'un à l'autre) sont inversement semblables à ABC.

(6) Les centres du cercle inscrit et des cercles exinscrits aux triangles XPQ, XP'Q' sont situés sur BX et AX; de plus, D, D_1 sont les centres du cercle inscrit et du premier cercle exinscrit à XPQ; D_2, D_3 sont les centres du deuxième et du troisième cercles exinscrits à XP'Q'.

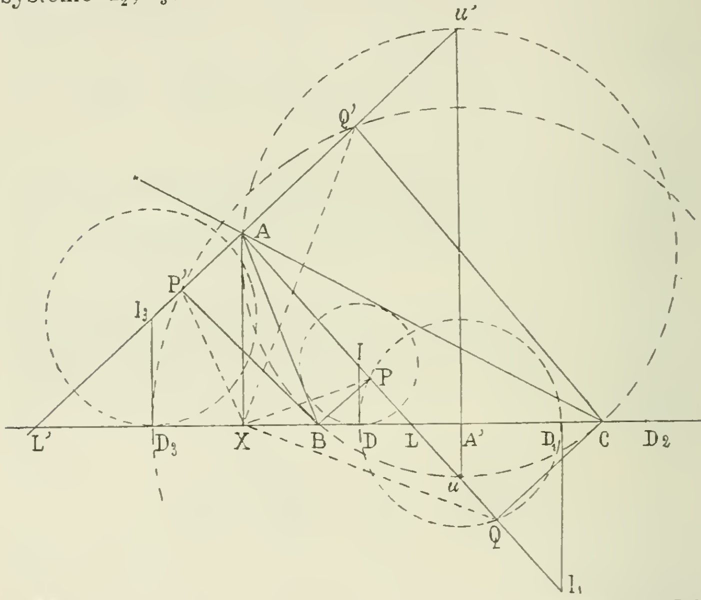
(7) Les cercles circonscrits à XPQ, XP'Q' passent par A'.

(8) Les diamètres des cercles XPQ, XP'Q' sont respectivement égaux à Au', Au, uu' étant le diamètre du cercle

circonscrit à ABC perpendiculaire à BC. (u' est du même côté de BC que A.)

(9) Les diamètres des cercles XPQ, XP'Q' coïncident avec les axes radicaux des cercles I, I_1, et I_2, I_3.

(10) Le cercle XPQ coupe orthogonalement le système de cercles I, I_1 ; et le cercle XP'Q' coupe orthogonalement le système I_2, I_3.



(11) La somme des aires des cercles (ou triangles) XPQ, XP'Q' est égale à l'aire du cercle (ou triangle) ABC.

(12) Les centres des cercles XPQ, XP'Q' et le centre du cercle des neuf points de ABC sont collinéaires.

(13) Sont collinéaires, par trois, les points

P, D, E; P, D_1, E_1; P', D_2, E_2; P', D_3, E_3;
Q, D, F; Q, D_1, F_1; Q', D_2, F_2; Q', D_3, F_3.

(14) Sont concycliques, par cinq, les points

B, D, I, F, P ; C, D, I, E, Q
B, D_1, I_1, F_1, P ; C, D_1, I_1, E_1, Q
B, D_2, I_2, F_2, P' ; C, D_2, I_2, E_2, Q'
B, D_3, I_3, F_3, P' ; C, D_3, I_3, E_3, Q'.

(15) Les points Q, L, P, A aussi bien que Q′, A, P′, L′ forment une division harmonique.

(16) $$AP : AL = \frac{1}{2}(AC + AB) : AC$$

$$AQ : AL = \frac{1}{2}(AC + AB) : AB$$

$$AP' : AL' = \frac{1}{2}(AC - AB) : AC$$

$$AQ' : AL' = \frac{1}{2}(AC - AB) : AB.$$

(17) $$PQ : AL = P'Q' : AL' = AC^2 - AB^2 : 2AC.AB.$$

(18) $$\Delta ABC = AQ.BP = AP.CQ = AQ'.BP' = AP'.CQ'.$$

(19) Si on abaisse de u, u', les perpendiculaires uS, $u'S'$ (*) sur AC, et uT, $u'T'$ sur AB, on aura

$$AS = AT = CS' = BT' = \frac{1}{2}(AC + AB),$$

$$CS = BT = AS' = AT' = \frac{1}{2}(AC - AB).$$

(20) BP, uS se coupent sur la circonférence ABC. Même propriété pour CQ, uT; BP′, $u'S'$; CQ′, $u'T'$.

(21) Si l'on désigne ces quatre points d'intersection par B_2, C_2, B'_2, C'_2,

$$4uS.SB_2 = 4uT.TC_2 = 4u'S'.S'B'_2 = 4u'T'.T'C'_2 = AC^2 - AB^2.$$

(22) $$u'B_2 = uB'_2 = AB,$$
$$u'C_2 = uC'_2 = AC.$$

(23) B_2 et B'_2, aussi bien que C_2 et C'_2, sont symétriquement situés par rapport à O, centre du cercle ABC.

(24) Les points E, E_1, P, Q, aussi bien que les points F, F_1, P, Q, sont concycliques.

Les diamètres de ces deux cercles sont EE_1, FF_1; leurs centres sont S, T.

(*) Pour ne pas compliquer davantage la figure, ces lignes, et quelques autres parmi celles qui sont indiquées plus loin, n'ont pas été tracées. Le lecteur les rétablira sans peine.

(25) Les points E_2, E_3, P', Q_2, aussi bien que les points F_2, F_3, P' Q', sont concycliques.

Les diamètres de ces deux cercles sont E_2E_3, F_2F_3; leurs centres sont S'. T'.

(26) Ces quatre cercles sont égaux, et leurs diamètres sont égaux à BC.

(27) Les deux premiers cercles coupent orthogonalement les cercles I, I_1: et les autres coupent orthogonalement les cercles I_2, I_3.

PROPRIÉTÉS DE TROIS FIGURES ÉGALES

Par M. **G. Tarry.**

Les symétriques d'une même figure par rapport aux côtés d'un triangle sont trois figures égales, cas particulier de trois figures semblables. Les propriétés connues de trois figures semblables donnent immédiatement les propositions suivantes:

1. — Les symétriques d'une même droite par rapport aux côtés d'un triangle fixe ABC forment un triangle inversement semblable au triangle fixe.

Le triangle des droites symétriques est perspectif avec le triangle ABC; le centre de son cercle inscrit est le centre de perspective.

Le lieu des centres de perspective est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

2. — Il existe une infinité de droites dont les symétriques par rapport aux côtés du triangle ABC sont des droites concourantes; leur lieu géométrique est le faisceau des droites qui passent par l'orthocentre de ABC.

Les triples de droites correspondantes tournent autour de trois points fixes A′, B′, C′ de la circonférence circonscrite au triangle ABC, et leur point de concours est sur la même ligne.

3. — Le triangle A′B′C′ est inversement semblable au triangle des droites symétriques.

Les points A′, B′, C′ sont les symétriques de l'orthocentre du triangle ABC par rapport aux côtés de ce triangle.

Les droites qui joignent les points A′, B′, C′ à un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle ABC sont les symétriques d'une même droite par rapport aux côtés de ce triangle.

4. — Les symétriques d'un même point par rapport aux côtés du triangle ABC sont les sommets d'un triangle perspectif avec le triangle A′B′C′, et le lieu de leur centre de perspective est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

5. — Le triangle A′B′C′ et le triangle ABC sont perspectifs; leur centre de perspective est l'orthocentre du triangle ABC et le centre du cercle inscrit au triangle A′B′C′.

6. — Il existe une infinité de points dont les symétriques par rapport aux côtés du triangle ABC sont situés en ligne droite, et le lieu de ces points est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

La droite qui renferme l'un de ces triples de points correspondants tourne autour du centre de perspective des triangles ABC et A′B′C′.

SUR LES AXES DE ROTATION

Par M. **G. Tarry.**

Étant données, dans l'espace, deux figures *directement* égales φ et φ' qui ont un point correspondant commun O, on démontre qu'elles ont un axe de rotation par le raisonnement suivant.

Soient a et b les positions de deux semi-droites menées par le point O dans la figure φ, et a', b' les positions correspondantes de ces semi-droites dans la figure φ'. Traçons les bissectrices a^m et b^m des angles plans aa' et bb'; par a^m menons le plan α perpendiculaire sur aa' et par b^m le plan β perpendiculaire sur bb'. Les deux plans α et β se coupent suivant une certaine droite x passant par le point double O. Les angles xa et xa' sont égaux, ainsi que les angles xb et xb'; par conséquent, les deux angles trièdres xab et $xa'b'$, qui ont leurs faces égales chacune à chacune,

sont égaux, et il devient évident que, par une rotation autour de x, a et b arrivent en même temps à coïncider avec a' et b', et cela de façon que la coïncidence se fasse point par point sur chaque rayon.

Cette démonstration n'est pas rigoureuse : par un raisonnement identique, on prouverait que, dans l'espace, tout changement de position d'un système invariable peut être obtenu par un simple mouvement de rotation autour d'un axe fixe (Piège cinématique, *J. E.*, 1894, p. 196).

Voici la solution exacte.

Supposons d'abord que les plans α et β se confondent en un seul. Les droites a, a' et les droites b, b' sont symétriques par rapport à ce plan, et on voit immédiatement que la droite d'intersection des plans ab et $a'b'$, située dans le plan de symétrie, est un axe de rotation.

Supposons maintenant que les plans α et β ne se confondent pas; ils se couperont suivant une droite x qui passe par le point O, et les deux angles trièdres xab et $xa'b'$, qui ont leurs faces égales chacune à chacune, seront nécessairement directement ou inversement égaux, suivant les dispositions de ces éléments égaux.

Le plan bissecteur de l'angle dièdre axa' est le plan α. Si les trièdres étaient inversement égaux, ils seraient symétriques par rapport à ce plan bissecteur, puisque la figure symétrique de l'un par rapport à ce plan se confondrait avec l'autre. Par suite, les droites b, b' seraient aussi symétriques par rapport à ce plan. Dès lors, les plans α et β se confondraient, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

D'où l'on conclut que les angles trièdres xab et $xa'b'$ sont *directement* égaux. (C. Q. F. D.).

De ce théorème, on déduit la conséquence suivante.

Étant donnés deux triangles égaux ABC, A'B'C' dans l'espace, s'il existe un point O tel que les deux tétraèdres OABC, OA'B'C' soient directement égaux, les plans perpendiculaires aux milieux des droites AA', BB', CC' passent par une même droite.

En effet, les deux figures directement égales déterminées

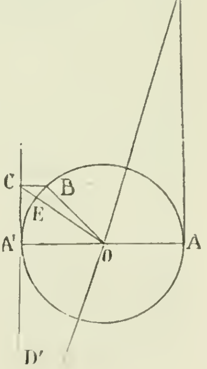
par les triangles ABC, A'B'C' ayant un point double O, ont une droite double dont tous les points sont des points doubles. Par conséquent, chaque point de cette droite se trouve sur tout plan également distant de deux points correspondants quelconques dans les deux figures, et en particulier sur les plans perpendiculaires aux milieux des droites AA', BB', CC'. Il est évident que la droite double rencontre la droite d'intersection des plans correspondants ABC et A'B'C'.

On voit, en outre, que si les trois plans se coupent en un point unique O, ce point ne pouvant être un point double des deux figures égales ABC et A'B'C', les deux tétraèdres, OABC et OA'B'C', qui ont leurs faces égales, chacune à chacune, sont nécessairement *inversement* égaux.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE DE LA CIRCONFÉRENCE

Par M. **Mannheim.**

Sans avoir recours à la trigonométrie, on peut vérifier l'exactitude de la construction donnée, page 77, par M. d'Ocagne.



Prolongeons DO jusqu'à sa rencontre en D' avec CA' et appelons E le point où CO coupe l'arc A'B.

Les droites EA', DD' étant parallèles, on a

$$\frac{A'D'}{EO} = \frac{CA'}{CE}.$$

Comme $EO = 1$, on a

$$CA' = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad CE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1.$$

Introduisant ces valeurs dans l'égalité précédente, il vient

$$A'D' = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

C. Q. F. T.

On voit qu'il est inutile de tracer la tangente AD

LA $(n+1)^e$ DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE

Par M. **G. Tarry.**

La figure (1), ci-dessous, établit cette démonstration, sans qu'il soit nécessaire de lui ajouter une rédaction, manifestement inutile.

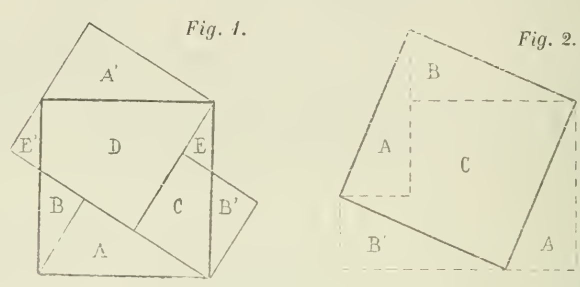


Fig. 1. *Fig. 2.*

Il existe, comme l'on sait, de nombreuses démonstrations analogues. La plus connue, et peut-être la plus simple, est celle qui est exposée dans le traité de Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, démonstration correspondant à la *figure* 2.

Toutes ces démonstrations peuvent se résumer ainsi :

On forme un contour polygonal tellement constitué que, en retranchant certaines aires, on trouve le carré de l'hypoténuse et tel, aussi, qu'en retranchant d'autres aires, manifestement égales aux précédentes, on obtient les carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

Cette méthode de démonstration conduit donc à découper la figure considérée en morceaux qui, convenablement assemblés, forment, d'une part, les carrés correspondants aux deux autres côtés, et, d'autre part, le carré de l'hypoténuse.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Aubry.**

La trigonométrie est née des besoins de l'Astronomie : les Chaldéens et les Indiens, qui furent les premiers astronomes, durent être amenés de bonne heure à l'étude des deux trigo-

nométries, mais les rares documents qu'on possède à ce sujet sont peu concluants sur l'étendue de leurs connaissances en trigonométrie. Il pourrait même très bien se faire que leur Astronomie ne fût que la connaissance des périodes des principaux phénomènes astronomiques, — ce qui indique d'ailleurs une fort longue suite d'observations ; — et c'est ainsi que les Égyptiens et les premiers astronomes grecs annonçaient les éclipses. Quoi qu'il en soit, le premier ouvrage connu où l'on voit la trigonométrie essayer de se préciser tout à la fois comme but et comme moyens est le traité d'Aristarque de Samos (vers 280) sur les distances comparées de la terre au soleil et à la lune.

Il mesure un angle en le comparant à un signe ou à un angle droit. Remarquant que les rapports des côtés d'un triangle rectangle sont déterminés par ses angles aigus, mais que la géométrie élémentaire ne suffit pas pour déduire ces rapports de ceux-ci, — et que ce problème est probablement du genre incommensurable, de même que ceux de la comparaison de la diagonale du carré au côté et de la circonférence au rayon, problèmes qui avaient déjà passionné les esprits, — l'idée lui vint de chercher deux limites de ce rapport.

La relation trouvée par Aristarque peut s'écrire :

$$\frac{1}{18} > \sin 3^\circ > \frac{1}{20}.$$

Il la démontre ainsi :

Quand la lune est dichotome, elle est le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont les deux autres sommets sont le soleil et la terre. Il montre que le cercle séparatif de la lumière et de l'ombre est sensiblement un grand cercle.

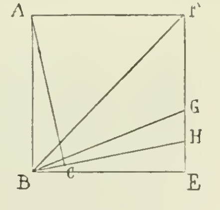


Fig. 1.

Soient A, B, C *(fig. 1)* les centres du soleil, de la terre et de la lune. Aristarque trouve, pour l'angle ABC, la valeur 1^{dr} moins un trentième de droit, valeur d'ailleurs fort inexacte. Menons la diagonale BF du carré AE, la bissectrice BG de l'angle FBE. On a

$$(\alpha) \qquad \frac{EG}{EH} > \frac{EBG}{DBE} = \frac{15}{2},$$

$$\frac{FG^2}{EG^2} = \frac{BF^2}{BE^2} = 2 > \frac{49}{25},$$

d'où
$$\frac{GF}{FG} > \frac{7}{5}$$

et par suite

(β) $$\frac{EF}{EG} = \frac{GF + EG}{EG} > \frac{7+5}{7} = \frac{12}{5}.$$

De (α) et (β) on conclut $\frac{EF}{EH} > 18$, donc $BH > BE > 18.EH$,

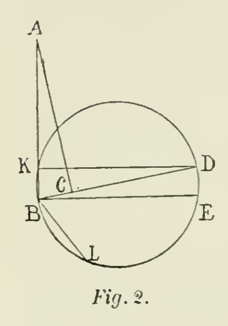


Fig. 2.

et comme on a
$$\frac{BH}{EH} = \frac{AB}{BC},$$
il vient $AB > 18.BC$.

Maintenant, menons $BD = BA$ *(fig. 2)* et la circonférence de diamètre BD, coupée en K par AB; puis l'arc BL égal au sixième de la circonférence. On a
$$10 = \frac{\text{arc}\,BL}{\text{arc}\,BK} > \frac{BL}{BK},$$

d'où
$$10.BK > BL = \frac{BD}{2};$$

or $$\frac{BD}{BK} = \frac{AB}{BC}, \qquad \text{donc} \qquad AB < 20.BC.$$

On doit donc à Aristarque de Samos l'idée de la considération du sinus, de la corde et de la tangente pour définir un angle. Il a compris que ces fonctions sont bien déterminées, a donné la relation
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$$
pour $\alpha > \beta$, et esquissé une méthode de calcul des grandeurs incommensurables.

Ces remarques ont eu l'effet le plus heureux sur les progrès de la géométrie de la mesure et paraissent avoir inspiré Archimède dans plusieurs de ses découvertes.

Archimède, en quelques endroits de ses écrits, définit aussi un angle par son sinus ou sa tangente. Dans l'admirable traité qu'il a écrit sur la mesure de la sphère, il pose comme axiome que, de deux lignes ayant mêmes extrémités et concaves

du même côté, la plus courte se trouve du côté de la concavité, d'où il suit que la circonférence est plus grande qu'un polygone quelconque qui lui est inscrit et plus petite qu'un polygone circonscrit. Cette proposition équivaut à la relation

$$\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$$

qu'il paraît impossible de démontrer sans pétition de principe.

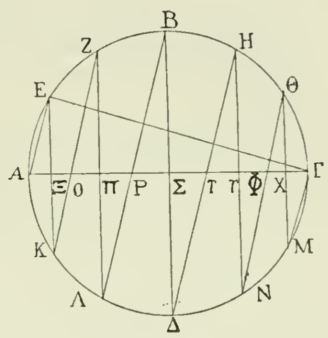


Fig. 3.

Le même traité d'Archimède donne une sommation curieuse de cordes correspondant à des arcs circulaires croissant en progression arithmétique. Soit un polygone d'un nombre pair de côtés *(fig. 3)*; joignons les sommets perpendiculairement à un même diamètre, on aura

$$EK + ZL + BD + HN + OM = \frac{GE.AG}{EA},$$

ce qui résulte de la considération des triangles semblables AEX, XKO, ZOP, PLR, etc. (*). Archimède montre aussi

(*) Dans les exercices des *Nouv. Ann. math.* de 1842, Lecointe a proposé la question suivante : une demi-circonférence étant divisée en un nombre impair de parties égales, on joint les deux divisions du milieu au centre. La somme des parties des cordes parallèles au diamètre menées par les points de la division et comprises dans l'angle dont il vient d'être parlé est égale au rayon. La *figure 4*, qui donne la démonstration de ce théorème, montre comment il se rattache à celui d'Archimède.

On a donné une autre démonstration du développement de $\Sigma \sin na$ en s'appuyant sur le théorème de Carnot, relatif aux projections d'un contour fermé (*Mathesis*, 1893).

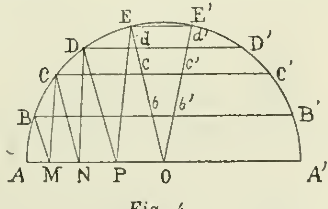


Fig. 4.

C'est à Euler qu'on doit l'expression analytique de $\Sigma \sin na$ et $\Sigma \cos na$. Dans son *Intr. in. anal. inf.*, il la trouve de deux manières : d'abord, en transformant les termes en exponentielles imaginaires, ce qui ramène à la sommation d'une progression géométrique ; ensuite, en remarquant que la suite des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique est une série récurrente dont l'échelle de relation est : $2 \cos a, -1$, ce qui donne la démonstration habituellement exposée aujourd'hui.

à effectuer la même sommation en s'arrêtant à une corde donnée.

On doit une mention à Erathosthène (vers 200), qui a émis les premières idées sur les cartes géographiques partielles, et imaginé la division de la circonférence en soixante parties.

C'est à l'illustre astronome Hipparque (vers 140) qu'on est redevable des premiers éléments des deux trigonométries, et de l'idée fort ingénieuse d'une table des valeurs trigonométriques: il avait calculé en effet une table de cordes. Ses ouvrages sont perdus, mais ses procédés sont probablement ceux que Ptolémée enseigne dans son *Almageste*, et que nous indiquerons plus loin. C'est Hipparque qui a proposé le partage de la circonférence en 360 parties, et imaginé la projection stéréographique.

Théodose (commencement de notre ère), Ménélaus (milieu du Ier siècle), Ptolémée (vers 130), Pappus (IVe siècle), et plusieurs autres Anciens ont successivement amélioré la trigonométrie sphérique. Le célèbre théorème du second était étendu à la sphère et utilisé dans ce but. Mais les démonstrations et les calculs trigonométriques sont restés longtemps longs et pénibles, par suite du défaut de méthodes générales.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin.**

384. — *L'identité:*

$$(q^2 + ap^2)^4 = 16ap^2q^2(q^2 - ap^2)^2 + (q^4 - 6ap^2q^2 + a^2p^4)^2$$

fournit toutes les solutions de l'équation :

$$x^4 = ay^2 + z^2.$$

385. — *On considère la suite récurrente :*

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1 + x, \qquad u_2 = 2x + x^2 \qquad \ldots$$

$$u_n = (1 + x)u_{n-1} - u_{n-2}.$$

Calculer u_n *en fonction de* x.

On trouve :

$$u_n = x^n + nx^{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-2}$$
$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-6)}{1.2.3}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-12)}{1.2.3.4}x^{n-4} + \ldots$$

La fonction u_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre :

$$(x^2 + 2x - 3)\frac{d^2u_n}{dx^2} + 3(n+1)\frac{du_n}{dx} - n(n+2)u_n = 0.$$

D'où, pour calculer A_p (coefficient de x^{n-p}), la formule de récurrence :

$$pA_p(2n - p + 2) - (2n - 2p + 3)(n - p + 1)A_{p-1}$$
$$+ 3(n - p + 2)(n - p + 1)A_{p-2} = 0.$$

386. — *Plus généralement, calculer* u_n, *sachant que*

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = x + a \qquad \ldots \qquad u_n = (x + a)u_{n-1} \pm u_{n-2}.$$

On trouve :

$$u_n = x^n + nax^{n-1} + \ldots$$

Ces polynomes satisfont aux équations différentielles du second ordre :

$$[(x+a)^2 \pm 4]\frac{d^2u_n}{dx^2} + 3(x+a)\frac{du_n}{dx} - n(n+2)u_n = 0.$$

D'où, pour calculer A_p, coefficient de x^{n-p}, la formule de récurrence :

$$p(p - 2n - 2)A_p + aA_{p-1}(n - p + 1)(2n - 2p + 3)$$
$$+ (a^2 \pm 4)(n - p + 2)(n - p + 1)A_{p-2} = 0.$$

Dans la formule précédente, pour $a = 0$, on a :

$$u_n = x^n + (n-1)x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}x^{n-4}$$
$$+ \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \ldots$$

qui satisfait à l'équation différentielle :

$$(x^2 + 4)u''_n + 3xu'_n - n(n+2)u_n = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport à x.

BACCALAURÉATS

Académie de Paris.

(Session d'avril 1895.)

BACCALAUREAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES)

I. *Problème obligatoire :*

Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône, connaissant sa hauteur h, et sachant :

1° Que sa surface latérale est égale à la somme des surfaces des bases ;

2° Que son volume est équivalent à six fois le volume d'une sphère de diamètre h.

II. *Trois questions à choisir :*

a) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

b) Calculer $\sin x$ connaissant $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$.

c) Résoudre un triangle connaissant b, c et A.

BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES COMPLET

1° On considère sur une sphère de centre O, deux petits cercles AA′, BB′, dont les plans sont parallèles et qui ont pour pôle commun le point M, et l'on demande de calculer l'angle $BOM = x$, connaissant l'angle $AOB = \alpha$ et le rapport m de la calotte sphérique AMA′ à la calotte sphérique BMB′.

2° Démontrer que deux pyramides qui ont des bases équivalentes et la même hauteur sont équivalentes.

QUESTION 497

Solution par M. Antoine.-C. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

La fonction

$$2[a^2x^2(y^2-b^2)^2+b^2y^2(x^2-a^2)^2]^3 \\ -(a^2y^2+b^2x^2)^2[a^2x^2(y^2-b^2)^2-b^2y^2(x^2-a^2)^2]^2$$

est divisible par les deux polynomes

$$a^2y^2+b^2x^2-2a^2b^2, \qquad 2x^2y^2-a^2y^2-b^2x^2.$$

Le vérifier et trouver le quotient. (E.-N. Barisien.)

Posons :

$$(1)\qquad a^2y^2+b^2x^2-2a^2b^2=m,$$

$$(2)\qquad 2x^2y^2-a^2y^2-b^2x^2=n.$$

Alors $2(x^2-a^2)(y^2-b^2)=n-m$ et le produit de (1) par (2) devient :

$$(3)\qquad a^2x^2(y^2-b^2)^2+b^2y^2(x^2-a^2)^2=\frac{m(m+n)}{2}-a^2b^2(n-m).$$

De (3) on tire encore :

$$(4)\qquad [a^2x^2(y^2-b^2)^2-b^2y^2(x^2-a^2)^2]^2=\frac{(m+n)^2}{2}\left[\frac{m^2}{2}-a^2b^2(n-m)\right].$$

Si l'on transporte dans l'expression donnée les valeurs (1), (3), (4) et que l'on range les termes suivant les puissances décroissantes du produit ab, on trouve :

$$F(x, y)=mn\left[\begin{array}{l}8a^6b^6(n-m)+a^4b^4(m+n)(5n-7m) \\ \qquad -a^2b^2m(m+n)^2+\dfrac{m^2(m+n)^2}{4}\end{array}\right].$$

C. Q. F. D.

QUESTION 516

Solution par M. Antoine.-C. Davidoglou, élève au lycée de Berlad.

Résoudre et discuter l'équation :

$$x^2(y^2 - 8ay + 18a^2) + 3ax(y^2 - 8ay + 9a^2) + 9a^2(y^2 - 2ay) = 0.$$

(Lauvernay).

Cette équation du second degré en x a pour discriminant, tous calculs faits,

$$\rho = 27a^2(y + a)(3a - y)^3.$$

Si S et P représentent respectivement $x' + x''$, $x'x''$, on a :

$$S = -\frac{3a}{y^2 - 8ay + 18a^2}\cdot[y - a(4 - \sqrt{7})][y - a(4 + \sqrt{7})].$$

$$P = \frac{9a^2}{y^2 - 8ay + 18a^2}\cdot y[y - 2a].$$

Comme le trinome $y^2 - 8ay + 18a^2$ est toujours positif, les valeurs remarquables de y sont :

$$-a, \quad 3a, \quad a(4 - \sqrt{7}), \quad a(4 + \sqrt{7}), \quad 0, \quad 2a,$$

qui se classent :

$$-a < 0 < a(4 - \sqrt{7}) < 2a < 3a < a(4 + \sqrt{7}),$$

si $a > 0$; et inversement, si $a < 0$.

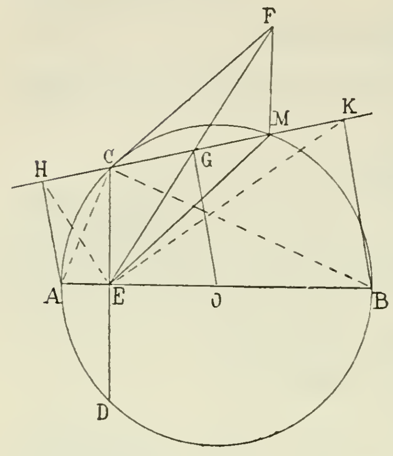
La discussion se fait alors facilement dans les deux cas.

QUESTION 579

Solution par M. Goyens, à Malines.

On donne une circonférence de diamètre AB, *une corde* CD *perpendiculaire en* E *à ce diamètre, et un point* M *de la circonférence. On achève le parallélogramme* MECF *ayant pour centre le point* C, *et on projette* A *et* B *sur la diagonale* MC, *en* H *et* K. *Démontrer que* GH = GK = GE. (L. Lévy.)

AHKB est un trapèze, O est le milieu de AB et OG est parallèle aux bases, donc passe par le milieu G de HK; donc GH = GK.



Les quadrilatères AHCE, ECKB sont inscriptibles; donc l'angle CHE = l'angle CAE, et l'angle CKE = l'angle CBE; par conséquent CHE + CKE = CAE + CBE = 90°.

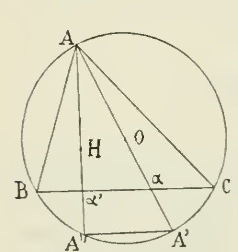
Le triangle HEK est donc rectangle, et la droite EG, qui joint le sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse vaut la moitié de celle-ci; donc EG = GH = GK.

Nota. — Solutions diverses par MM. Vazou, Droz-Farny, Davidoglou, Alfred Champion, Georges Rodrigez, étudiant à Medellin (Colombie) et Mme Ve Prime.

QUESTION 581

Solution par M. Aletrop, à Madrid.

Si AA′, BB′, CC′, *diamètres de la circonférence circonscrite au triangle* ABC, *rencontrent les côtés correspondants* BC, CA, AB *en* α, β, γ, *la somme algébrique des trois rapports* $\frac{\alpha A'}{A\alpha}$, $\frac{\beta B'}{B\beta}$, $\frac{\gamma C'}{C\gamma}$ *est l'unité.* (E. Lauvernay.)



Soit O le centre du cercle circonscrit. En observant que $\alpha A' = OA' - O\alpha = OA - O\alpha$, on a

$$\frac{\alpha A'}{A\alpha} + \frac{\beta B'}{B\beta} + \frac{\gamma C'}{C\gamma} = \frac{OA}{A\alpha} + \frac{OB}{B\beta} + \frac{OC}{C\gamma}$$
$$= \left(\frac{O\alpha}{A\alpha} + \frac{O\beta}{B\beta} + \frac{O\gamma}{C\gamma}\right).$$

Or, la somme des trois premiers rapports et celle des trois

autres sont respectivement égales à 2 et 1, d'après les théorèmes d'Euler et de Gergonne; la différence est donc égale à 1 (*).

Autrement (cette solution est de Mme Ve Prime et de M. Droz-Farny). — Menons la hauteur AA″ qui coupe BC, en α'; la circonférence, en A″; si H est l'orthocentre, on sait que

$$A''\alpha' = \alpha'H.$$

On a donc $\sum \frac{\alpha A'}{A\alpha} = \sum \frac{\alpha' A''}{A\alpha'} = \sum \frac{\alpha' H}{A\alpha'}$.

Mais, d'après un théorème connu,

$$\sum \frac{\alpha' H}{A\alpha'} = 1,$$

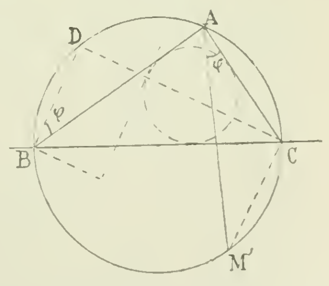
donc aussi $$\sum \frac{\alpha A'}{A\alpha} = 1.$$

Nota. — Nous avons reçu des solutions diverses, notamment des solutions trigonométriques de MM. Vazou; Jean Négretzu, élève à la faculté de Bucarest; Davidoglou; Droz-Farny et Alfred Champion.

QUESTION 582

Solution par A. Droz-Farny.

On mène une tangente quelconque au cercle inscrit à un triangle rectangle en A; *si* φ *désigne l'angle de cette tangente avec le côté* AB, *on mène par* A *la droite* AM *telle que l'angle* CAM *soit égal à* φ. *Trouver le lieu du point* M *tel que la distance* AM *soit égale à la somme des distances des extrémités de l'hypoténuse* BC *à la tangente variable.* (E. Lauvernay.)



Menons par B une parallèle BT à la tangente variable et abaissons sur cette droite la perpendiculaire CL; on aura évidemment CL = AM. Le point L appartient à la circonférence circonscrite au triangle ABC.

(*) Nous dirons, à cette occasion, que le théorème de Gergonne, quoique trouvé directement par lui (Voir *Annales de Gergonne*, t. IX, p. 277), n'est qu'une conséquence immédiate du théorème d'Euler.

Menons la droite AM qui fait avec AC un angle variable φ; cette droite coupe la circonférence circonscrite en M′ ; on a

$$M'C = AL, \qquad \widehat{LCA} = \widehat{ABL} = \widehat{CAM'}, \qquad \widehat{AM'C} = \widehat{ALC}.$$

Le triangle ACM est donc égal au triangle CAL, par conséquent, AM′ = CL. Le point M′ coïncide donc avec M et le lieu cherché est la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Nota. — Autre solution par M. Alfred Champion.

QUESTION 583

Solution par M. Alfred Champion.

En appelant dans un triangle ABC, a, b, c R, r, r_a, r_b, r_c, *les côtés, le rayon du cercle circonscrit et les rayons des cercles tangents aux trois côtés, démontrer que l'on a*

$$a(b + c) = (r - r_a)(4R + r - r_a);$$

en déduire immédiatement

$$a(b - c) = (r_b - r_c)(4R - r_b - r_c).$$

(E. Lemoine.)

L'expression $A = a(b + c)$ se transforme successivement de la manière suivante :

$$A = \frac{a(b+c)[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{a(b+c)[(b-c)^2 + 4bc - a^2]}{2p.2(p-a)}$$

$$= \frac{a(b+c)(4bc - [a^2 - (b-c)^2]}{2p\,2(p-a)} = \frac{a(b+c)(4bc - (a+b-c)(a+c-b)]}{2p\,2(p-a)}$$

$$= \frac{a(b+c)[4bc - 4(p-c)(p-b)}{4p(p-a} = \frac{abc(b+c) - a(b+c)(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$$

$$= \frac{abc(2p-a) - a(2p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)} = \frac{abc(2p-a)}{p(p-a)} + \frac{(p-b)(p-c)(a^2-2ap)}{p(p-a)}$$

$$= \frac{abcp}{p(p-a)} + \frac{abc(p-a)}{p(p-a)} + \frac{(p-b)(p-c)(a^2 - 2ap + p^2 - p^2)}{p(p-a)}$$

$$= \frac{abc}{(p-a)} + \frac{abc}{p} + \frac{(p-b)(p-c)(p-a)^2}{p(p-a)} - \frac{(p-b)(p-c)p^2}{p(p-a)}$$

$$= \frac{abc}{p-a} + \frac{abc}{p} + \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-a)^2}{p^2(p-a)^2} - \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)p^2}{p^2(p-a)^2}$$

$$= \frac{abc\,4S}{(p-a)\,4S} + \frac{abc\,4S}{4Sp} + \frac{S^2(p-a)^2}{p^2(p-a)^2} - \frac{S^2p^2}{p^2(p-a)^2}.$$

En appliquant des formules bien connues, on a

$$A = 4Rr_a + 4Rr + r^2 - r_a^2,$$

ou, finalement,

$$a(b + c) = 4R(r_a + r) + (r + r_a)(r - r_a) = (r + r_a)(4R + r - r_a).$$

Par analogie, on écrit immédiatement :

$$b(c+a) = (r+r_b)(4R+r-r_b) = 4Rr + 4Rr_b + r^2 - r_b^2.$$
$$c(a+b) = (r+r_c)(4R+r-r_c) = 4Rr + 4Rr_c + r^2 - r_c^2.$$

Retranchant

$$a(b-c) = 4R(r_b - r_c) - (r_b^2 - r_c^2)$$
$$= 4R(r_b - r_c) - (r_b - r_c)(r_b + r_c)$$
$$= r_b - r_c)(4R - r_b - r_c). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Seconde solution (*).

On sait que $4R + r - r_a = r_b + r_c.$

Or $$r + r_a = \frac{S}{p} + \frac{S}{p-a} = \frac{S(b+c)}{p(p-a)},$$

$$r_b + r_c = \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} = \frac{Sa}{(p-b)(p-c)}$$

$$(r + r_a)(4R + r - r_a) = \frac{S^2a(b+c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = a(b+c).$$

Effectuons une transformation continue en B ; il suffira de remplacer

$$a,\ b,\ c,\ R,\ r,\ r_a,\ r_b,\ r_c$$

respectivement par

$$-a,\ b,\ -c,\ -R,\ r_b,\ -r_c,\ r,\ -r_a$$

on aura $-a(b-c) = (r_b - r_c)(-4R + r_b + r_c)$

ou $a(b-c) = (r_b - r_c)(4R - r_b - r_c).$

Nota. — Solutions diverses par MM. GOYENS, à Malines ; Jean NEGRETZU, à Bucarest et DAVIDOGLOU.

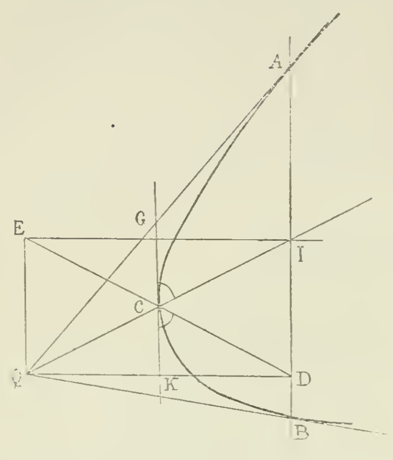
QUESTION 584

Solution par M. VAZOU.

Soit AB *une corde d'une parabole* P. *On projette le pôle de* AB *sur* AB *en* D, *et sur la perpendiculaire élevée au milieu de* AB, *en* E. *Démontrer que* DE *passe par le foyer de* P. (G. L.)

(*) Cette solution est de M. DROZ-FARNY.

La diagonale QI du rectangle DQEI qui joint le pôle Q de AB au milieu I de la corde AB est parallèle à l'axe de la parabole : d'autre part, on sait que le milieu C de la droite QT, point de rencontre des diagonales du rectangle, se trouve sur la parabole P et que la tangente IK à la parabole en ce point est parallèle à AB ; d'ailleurs, par raison de symétrie l'angle $\widehat{KCD}$ est égal à l'angle GCI, par conséquent la droite CD qui fait des angles égaux avec la parallèle à l'axe CI et avec la tangente CK passe par le foyer de la parabole.



Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny ; Davidoglou ; G. Tzitzéica, et Mme Ve F. Prime.

QUESTION 585

Solution par M. A. Droz-Farny.

On considère deux cercles O *et* O′. *Soit* A *le point de rencontre de deux tangentes communes d'espèces différentes : on projette ce point en* a *sur* OO′.

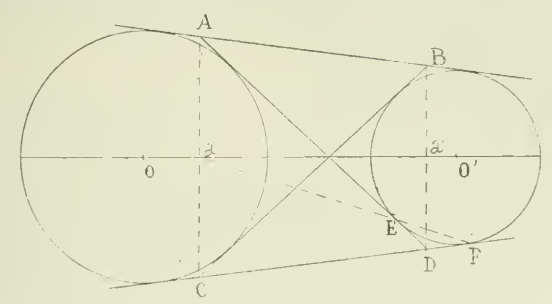
1° Le point a *a même polaire par rapport aux cercles* O *et* O′ *: cette polaire passe par deux autres points tels que* A ;

2° Le point a *est à l'intersection de droites de contact sur* O *et* O′ *de tangentes communes d'espèces différentes.* (E. Foucart.)

Soient A, B, C, D les sommets du quadrilatère circonscrit aux cercles O et O′. On sait que, dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, les deux diagonales AC et BD et la droite OO′ qui joint les points de concours des côtés opposés (ici les deux centres de similitude) forment un triangle autopolaire par rapport à la conique.

Le quadrilatère ABCD étant circonscrit aux deux cercles,

le triangle en question est conjugué par rapport aux deux cercles, d'où le théorème.



La droite EF, qui joint deux points de contact sur O' de tangentes d'espèces différentes, étant polaire du point D, passe évidemment par le pôle a de la droite BD.

Remarque. — La figure proposée jouit encore de la propriété suivante, facile à démontrer :

Le quadrilatère ABCD *est inscriptible à une circonférence concentrique à celles qui passent par les points de contact des tangentes intérieures et par ceux des tangentes extérieures.*

En représentant OO' *par* d, *les rayons sont respectivement :*

$$\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + 4RR'}\,; \quad \frac{1}{2}\sqrt{d^2 - 4RR'}\,; \quad \frac{1}{2}d.$$

Nota. — Solutions diverses par Mme Ve F. Prime et M. Davidoglou.

QUESTIONS PROPOSÉES (*)

627. — Soient :

O, O_A, O_B, O_C, le cercle inscrit et les cercles exinscrits à un triangle ABC,

I, le centre radical des cercles O_A, O_B, O_C,

I_A, le centre radical des cercles O, O_B, O_C,

I_B, le centre radical des cercles O, O_A, O_C,

I_C, le centre radical des cercles O, O_A, O_B.

(*) Je prie les correspondants que ces questions intéressent de vouloir bien m'adresser le plus rapidement possible, après l'apparition du numéro, les solutions des questions proposées. De cette façon, les solutions seront publiées peu de temps après la position de la question. *G. L.*

Montrer que :

1° Le triangle $I_A I_B I_C$ est semblable au triangle formé par les centres des cercles O_A, O_B, O_C, et le rapport de similitude de ces deux triangles est $\frac{1}{2}$.

2° Le point I est le point de rencontre des hauteurs du triangle $I_A I_B I_C$. *(E.-N. Barisien.)*

628. — On donne sur une circonférence : 1° deux points A, B et leurs symétriques A′, B′ par rapport à un diamètre; 2° une droite CD, perpendiculaire à ce diamètre. On joint A et B à un point quelconque M de la circonférence ; BM rencontre CD, en E; AM rencontre CD, en G.

Démontrer que les droites B′G, A′E se coupent sur la circonférence. *(Alfred Champion.)*

629. — Soit BAC un triangle isoscèle (AB = AC); aux points B, C on élève aux côtés BA, CA des perpendiculaires qui se coupent en D. Soit M un point arbitrairement choisi sur la base BC; par M, on mène des parallèles aux côtés AB, AC et aux droites BD, CD. On forme ainsi deux parallélogrammes MAPQ, MDRS.

Démontrer : 1° Que PQ, RS se coupent sur BC;

2° Que les droites : AM, RS, d'une part; DM, PQ, d'autre part, sont rectangulaires. *(G. L.)*

630. — On considère une circonférence Γ et un point A, fixe. Soit M un point mobile sur Γ; la tangente en M rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de AM en un point I dont on demande le lieu géomérique. *(G. L.)*

631. — Autour d'un point A, on fait tourner une transversale qui coupe une circonférence Γ aux points M, M′; soient ω, ω′ les centres des circonférences qui, passant par A, touchent Γ, respectivement aux points M, M′.

1° Trouver le lieu du point de rencontre des droites MM′ ωω′;

2° Démontrer que

$$\text{arc}\,AM + \text{arc}\,AM' = \text{arc}\,MM'. \qquad (G.\ L.)$$

632. — On considère une circonférence Γ et un point A. Démontrer que, à ce point A, correspond une droite α telle que le rapport $\frac{\overline{MA}^2}{MH}$ reste constant. M désignant un point quelconque de Γ, MH étant la distance de M à la droite α.

(G. L.)

633. — On donne une circonférence de cercle, la tangente en m à cette courbe, et deux points a, b sur cette droite. Les droites qui joignent un point quelconque c de la circonférence aux points a et b rencontrent de nouveau la circonférence en p et q : démontrer que les droites mp, mq interceptent, sur une parallèle à la tangente donnée, un segment qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de c sur la circonférence. *(Mannheim.)*

634. — On donne les trois points a, b, c sur une droite. Quel est le lieu d'un point m, tel que

$$\frac{1}{\operatorname{tg} bma} + \frac{1}{\operatorname{tg} cmb} = \text{const.}$$

(Mannheim.)

635. — Soient A′, B′, C′ les points de rencontre de la droite Δ qui passe par les deux points de Brocard d'un triangle ABC avec les côtés de ce même triangle; désignons, par α, β, γ, les distances algébriques des points A′, B′, C′ au *premier* point de Brocard et par p_a, p_b, p_c les distances algébriques des sommets du triangle à Δ. On a la relation

$$\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{1}{\alpha.p_a} - \frac{1}{\beta.p_b}\right] + \frac{b^2}{c^2}\left[\frac{1}{\beta.p_b} - \frac{1}{\gamma.p_c}\right] + \frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\gamma.p_c} - \frac{1}{\alpha.p_a}\right] = 0.$$

(Louis Bénézech.)

636. — On donne deux points fixes A et B. 1° Déterminer sur une droite AX, menée par A, deux points C, D tels que BC $\times$ BD ait une valeur donnée m^2 et qu'en même temps AB soit la bissectrice extérieure de l'angle CBD. 2° Quel est le lieu des points C et D lorsque AX tourne autour de A ?

Mêmes questions en supposant que AB doive être la bissectrice intérieure de l'angle CBD. *(Bernès.)*

637. — On donne un angle A et, sur l'un des côtés, un point fixe B. Lieu de M tel que le rayon qui passe par B dans le cercle ABM fasse un angle donné α avec l'isogonale AX de AM relativement à l'angle A. Cas où α est droit.

(Bernès.)

638. — Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux droites isogonales variables dont l'une rencontre BC en M; trouver le lieu du point P où l'autre droite est rencontrée par le rayon $B\omega$ du cercle ABM. *(Bernès.)*

639. — Dans l'angle A d'un triangle ABC on trace deux isogonales variables dont l'une rencontre en M la circonférence ABC. Trouver le lieu du point P où l'autre droite est rencontrée par la circonférence qui, passant par A et B, a son centre sur BM. *(Bernès.)*

640. Par le milieu C d'une corde fixe AB d'un cercle O on trace de part et d'autre de CA deux rayons vecteurs CM, Cm également inclinés sur CA. 1° Démontrer que la corde Mm passe par un point fixe Q, et que les cercles QCM, QCm sont orthogonaux au cercle O. 2° Lieu du centre du cercle CMm.

(Bernès.)

641. — Dans un quadrilatère ABCD, AC, BD se coupent en M, AD, BC en P, AB, CD en Q. 1° Montrer qu'il y a, sur chaque côté du triangle MPQ, sur MP par exemple, un point q, et un seul, tel que ce côté soit bissectrice intérieure ou extérieure de chacun des angles AqB, CqD sous lesquels, de q, on voit les côtés qui passent par Q. 2° Dans le cas où ABCD est inscriptible, faire voir que les quadrilatères ADMq, BCMq, BDPq, CAPq sont aussi inscriptibles et que $qA.qB = qC.qD = qM.qP$. *(Bernès.)*

Erratum. — Page 96, *il faut renverser* le deuxième rapport de la dernière ligne.

Le Directeur Gérant,
G. de LONGCHAMPS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 8340-4-95.

LA TRANSFORMATION DE BOSCOVICH

Par M. **E.-M. Langley**, *M. A.*, professeur de mathématiques, Bedford (Angleterre).

Dans la *Mathematical Gazette* (avril 1894), M. Langley (le rédacteur) donne un intéressant aperçu d'un cercle signalé pour la première fois par Boscovich (*), et appelé quelquefois *le cercle excentrique*. Dans le même recueil (décembre 1894), M. Langley montre comment on peut exposer la méthode de Boscovich, en la présentant comme une introduction aux transformations générales. Nous reproduisons ici les parties principales de son article (**).

1. Définition. — *Soient* AB (fig. 1) *une droite fixe,* S *et* O *deux points fixes,* SP *et* OQ *un couple quelconque de parallèles passant par* S *et* O. *Si* OP, SQ *se coupent sur* AB, *on dit que les points* P *et* Q *se correspondent.*

Si Z est le point d'intersection de OP, SQ, on a

$$SP : OQ = SZ : QZ.$$

Donc, si Q devient infiniment voisin de AB, le point P s'éloigne à l'infini.

En raison de cette propriété, AB est appelée *la droite de fuite.*

2. Théorème. — *Si* P *décrit une droite* PH *rencontrant la droite de fuite* AB *en* H, Q *décrit une droite* LQ, *parallèle à* SH.

Par O menons une parallèle à PH *(fig. 1)*. Si L est son point de concours avec AB, L est un point fixe. Joignons LQ.

(*) *Elementa Universæ Matheseos*, tome III, Rome, 1754.

(**) Nous devons cette traduction à l'obligeance de M. Mackay, professeur à Edimbourg; nous lui adressons ici, à ce propos, tous nos remerciements. [*G. L.*]

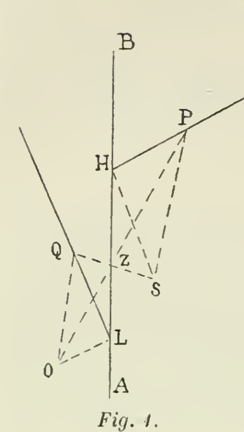


Fig. 1.

De la similitude des triangles OLZ, OZQ aux triangles PHZ, PZS, on déduit :

$$LZ : ZO = HZ : ZP$$
$$ZO : ZQ = ZP : ZS$$

d'où $$LZ : ZQ = HZ : ZS.$$

Et comme $\widehat{LZQ} = \widehat{HZS}$,
on a $\widehat{ZLQ} = \widehat{ZHS}$.

Par conséquent, Q appartient à une droite fixe LQ, parallèle à SH.

De là on tire cette conclusion :

Des droites qui se correspondent sont telles que chacune est le lieu d'un point qui correspond à un point sur l'autre.

3. — 1° Au lieu de suivre la marche ci-dessus, il est évident que l'on pourrait d'abord donner la définition suivante des droites correspondantes :

Soient AB *une droite fixe,* O *et* S *deux points fixes quelconques,* HP, LQ *deux droites quelconques menées des points* H *et* L *sur* AB, *et parallèles à* OL, SH; *les droites* HP, LQ *sont correspondantes.*

(2°) Ensuite, on pourrait établir le théorème suivant :

Lorsqu'une droite PH *passe par un point fixe* P, *la droite correspondante* LQ *passera par un point fixe* Q *tel que* SP *et* OQ *sont parallèles.*

(3°) Enfin, on pourrait définir des points correspondants comme les *points d'intersection des droites correspondantes.*

Le procédé pour déduire, d'une droite donnée PH, la correspondante LQ, est appelé *réversion;* pour distinguer entre la droite originale PH et la droite dérivée LQ, on appelle LQ le *revers* de PH, et PH l'*obvers* de LQ. On doit observer que ce rapport n'est pas strictement réciproque, sauf quand O et S coïncident.

4. — *Un angle donné peut par réversion devenir un angle d'une grandeur donnée quelconque.*

Soient a, b les points où les côtés CB, CA (*fig.* 2) de l'angle donné BCA rencontrent la *droite de fuite*, et soit S un point quelconque sur l'arc aSb capable de l'angle donné.

Par O, traçons les parallèles à aC, bC jusqu'à leur rencontre avec la *droite de fuite* en a', b'. Par a', b' traçons $a'C'$, $b'C'$ parallèles à Sa, Sb.

L'angle $a'C'b'$, qui est le revers de l'angle aCb, aura la grandeur donnée.

5. — *Un triangle donné peut par réversion devenir un triangle équilatéral.*

Soient a, b, c (*fig.* 2) les points où les côtés BC, CA, AB du triangle donné rencontrent la *droite de fuite*. Soit S le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles équilatéraux sur ab, bc.

Par O, traçons les parallèles à BC, CA, AB jusqu'à leur rencontre avec la *droite de fuite* en a', b', c'. Par a', b', c' traçons B'C', C'A', A'B' parallèles à Sa, Sb, Sc.

Le triangle A'B'C', qui est le revers du triangle ABC, sera équilatéral.

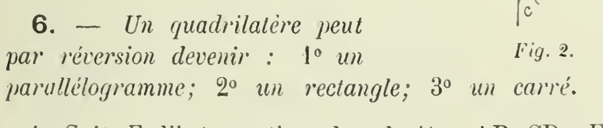


Fig. 2.

6. — *Un quadrilatère peut par réversion devenir : 1° un parallélogramme; 2° un rectangle; 3° un carré.*

1° Soit E l'intersection des droites AB, CD; F celle de BC, DA.

Pour toutes les positions de S, le revers du quadrilatère est un parallélogramme, si par réversion EF passe à l'infini.

2° Si S est un point quelconque sur la circonférence qui a EF pour diamètre, le revers du quadrilatère sera un rectangle.

3° Si les diagonales AC, DB coupent EF en H, K, et si S est un des points d'intersection des cercles de diamètres EF, HK, les diagonales, aussi bien que les côtés adjacents, du revers du quadrilatère seront rectangulaires.

7. — *Les tangentes subissent réversion en tangentes.*

Par conséquent, toutes les propriétés de pôles et de polaires peuvent subir réversion.

8. — *Le rapport anharmonique d'un faisceau se conserve après réversion.*

Si les rayons d'un faisceau dont le centre est P rencontrent la *droite de fuite* en a, b, c, d, et les rayons correspondants menés par Q, le revers du point P, rencontrent la *droite de fuite* en a', b', c', d', on a

$$\begin{aligned} Q(a'b'c'd') &= S(abcd), \\ &= P(abcd). \end{aligned}$$

9. — De là on déduit *la propriété anharmonique d'une conique.*

Si l'on prend S pour foyer, et la directrice pour *droite de fuite*, une conique peut par réversion devenir un cercle.

Par suite aussi, *une conique peut par réversion devenir une conique.*

10. — Si l'on prend la polaire de S pour *droite de fuite*, une conique subit réversion en une conique dont le centre est O.

LA LIAISON ENTRE LA RÉVERSION ET LA PROJECTION PERSPECTIVE

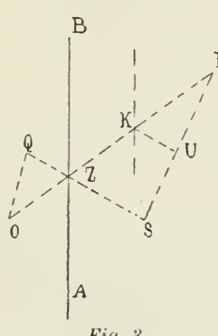


Fig. 3.

Du côté de la *droite de fuite* AB (*fig. 3*), opposé à O, et à une distance égale, menons une droite parallèle à AB. Si OP coupe cette parallèle en K, et si KU, menée parallèleà SQ, coupe SP en U, nous aurons

$$\begin{aligned} SU : SP &= ZK : ZP \\ &= OZ : ZP \\ &= OQ : SP; \end{aligned}$$

de

$$SU = OQ.$$

Par conséquent, le lieu de U est une courbe égale à celle décrite par le point Q.

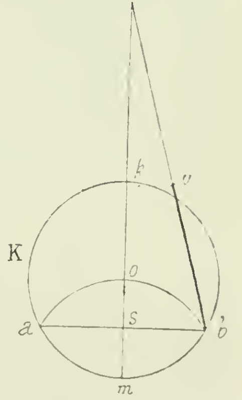
Mais U est la projection perspective de P, S étant le *centre et* HK *l'axe de perspective.*

Si O et S coïncident, alors la transformation de Boscovich sera absolument identique avec la projection perspective. Il faut seulement choisir l'axe de perspective du côté de la droite de fuite opposé au centre S et également éloigné.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE
DU CERCLE

M. **Ant. Pleskot**, professeur à l'École réale tchèque (de Prague).

Dans le numéro d'avril du *Journal,* M. d'Ocagne expose une rectification approchée du cercle, qui s'obtient en construisant géométriquement $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et en ajoutant les segments ainsi obtenus. L'erreur de cette construction est, environ, les *cinq-millièmes du rayon*, pour la dernière circonférence. J'ai trouvé et publié dans le *Câsopis pro pèsováni mathematiky a fysieky*, une construction très simple; l'erreur, dans cette construction, est plus faible que les *deux dix-millièmes*, dans les mêmes conditions.



Soit K le cercle de centre O et de rayon $r = 1$. De l'extrémité m d'un diamètre quelconque, traçons un cercle de rayon r, coupant le cercle K aux points a, b. Du point s, qui est le point d'intersection de la droite ab et du diamètre km, prenons sur le diamètre $sl = 2ab$; et sur lb prenons $lv = 2r$. La longueur de la droite vb donne *approximativement* la valeur $\frac{\pi}{2}$.

Démonstration :

$$\overline{sb} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \overline{sl} = 2\sqrt{3};$$

donc $\overline{lb} = \sqrt{\overline{sb}^2 + \overline{sl}^2} = \dfrac{\sqrt{51}}{2}$,

et, par suite, $\overline{vb} = \dfrac{\sqrt{51}}{2} - 2$;

ou $2.\overline{vb} = \sqrt{51} - 4 = 3,1414284...$

or, $\pi = 3,1415926...$

finalement $\pi - 2\overline{vb} < 0,0001642$.

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Aubry.**

(*Suite*, voir page 105.)

L'*Almageste* de Ptolémée contient la solution de beaucoup de problèmes particuliers et une table de cordes pour tous les arcs de la circonférence de trente en trente minutes, avec les trentièmes des différences, pour l'interpolation. Il divise, comme aujourd'hui, la circonférence en trois cent soixante parties, celles-ci en soixante minutes, etc. Les fractions décimales n'étaient pas encore inventées; il emploie également des divisions sexagésimales pour les longueurs, et leur donne les mêmes noms: le demi-diamètre est divisé en soixante parties, etc. (*). Ainsi la corde correspondant à l'arc de $45'$ est $47'8''$, ou $\dfrac{47}{3\,600} + \dfrac{8}{216\,000}$ du rayon.

Il n'emploie pas les sinus, mais les cordes, et résout les triangles en les décomposant en triangles rectangles; chaque question nécessite une solution particulière. Quant à la manière dont il constitue sa table, elle mérite une mention plus complète. Il s'agit de trouver la corde correspondant à l'arc de $30'$. Voici comment il y parvient.

(*) Cette numération incommode a subsisté jusqu'à la fin du XVIe siècle: Rheticus, Stevin, Viète et Neper ont par leurs travaux imposé l'usage de la numération décimale.

Soient la demi-circonférence ΑΒΓ (fig. 5) *et* ΔΒ *le rayon perpendiculaire; prenons le milieu* Ε *de* ΔΓ *et* ΕΖ = ΕΒ : ΖΔ *est le côté du décagone et* ΒΖ *celui du pentagone.*

Fig. 5.

De là, comme ΔΕ = 30° et ΔΒ = 60°, on a ΔΖ = 37°4′55″ pour le côté du décagone, et ΒΖ = 70° 32′ 3″ pour celui du pentagone. On sait d'ailleurs que ceux de l'hexagone, du carré et du triangle équilatéral sont respectivement 60°, 84°51′10″ et 103° 55′ 23″. Les cordes des suppléments de la demi-circonférence se déduisent facilement de celles ci.

Il donne ensuite son célèbre théorème (*) : *le rectangle des diagonales d'un quadrilatère inscrit est égal à la somme des rectangles des côtés opposés*, qu'il démontre en menant par un des sommets Β *(fig. 6)* une droite ΒΕ faisant avec le côté ΒΑ un angle égal à ΔΒΓ.

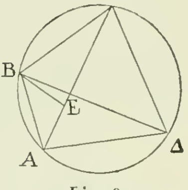


Fig. 6.

D'après cela, connaissant les cordes ΑΒ, ΑΓ *(fig. 7)*, on pourra déduire la corde ΑΒ, puisqu'on a

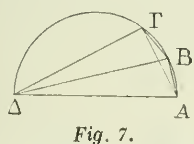


Fig. 7.

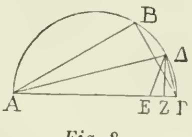


Fig. 8.

$$\mathrm{AB}.\Delta\Gamma + \Gamma\mathrm{B}.\mathrm{A}\Delta = \mathrm{A}\Gamma.\Delta\mathrm{B}.$$

Donc, comme on connaît les cordes de 72° et de 60°, on aura celle de 12°.

Connaissant la corde ΒΓ (fig. 8) *on aura de cette façon celle de l'arc* ΔΓ *moitié moindre. Abaissons la perpendiculaire* ΔΖ, *on a*

$$(\alpha) \qquad \mathrm{Z}\Gamma = \frac{1}{2}(\mathrm{AB} - \mathrm{A}\Gamma), \qquad \overline{\Gamma\Delta}^2 = \mathrm{A}\Gamma.\Gamma\mathrm{Z}.$$

En effet, prenons ΑΕ = ΑΒ, on aura ΒΔ = ΑΕ = ΔΓ et ΕΖ = ΖΓ. Or ΕΓ = ΑΓ − ΑΒ : de là, la première relation (α). La seconde se tire de la similitude des triangles ΑΔΖ, ΔΓΖ.

On connaît la corde de 12°, on en tirera ainsi successive-

(*) Carnot a observé que, du théorème de Ptolémée, on peut déduire oute la trigonométrie rectiligne.

ment celles des arcs de 6°, 3°, 1° 30′, 45′. Ces deux dernières sont égales à 1° 34′ 15″ et 0° 47′ 8″.

De la connaissance de la corde de 1° 30′, on tirera celle des cordes de 3°, de 4° 30′, etc., par le théorème suivant :

Soient les arcs AB, BΓ (fig. 9), *on a*

$$B\Delta . \Gamma E = B\Gamma . E\Delta + \Delta\Gamma . EB,$$

d'où AΓ.

Il reste à trouver les cordes de 30′, 1°, 2°, 2° 30′, etc. On y arrivera avec une certaine approximation, au moyen du

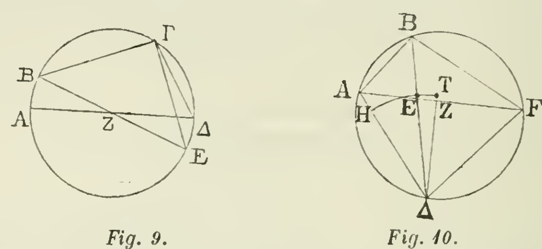


Fig. 9. *Fig. 10.*

lemme suivant : *De deux cordes* BΓ, BA (fig. 10), *la plus grande est à la plus petite en moindre raison que les arcs.* En effet, soit Δ le milieu de l'arc supplémentaire AΓ ; on a ΓE > EA, EΔ > ΔZ ; donc le cercle décrit du rayon ΔE coupe la bissectrice ΔZ en T au delà de Z. Or

$$\text{sect. } \Delta ET > \text{tri. } \Delta EZ, \qquad \text{tri. } \Delta EA > \text{sect. } \Delta EH,$$

donc $$\frac{EZ}{EA} = \frac{\text{tri. } \Delta EZ}{\text{tri. } \Delta EA} < \frac{\text{sect. } \Delta ET}{\text{sect. } \Delta EH} = \frac{\widehat{Z\Delta E}}{\widehat{E\Delta A}},$$

d'où $$\frac{ZA}{EA} = \frac{EZ + EA}{EA} < \frac{\widehat{Z\Delta E} + \widehat{E\Delta A}}{\widehat{E\Delta A}} = \frac{\widehat{\Gamma\Delta A}}{\widehat{E\Delta A}},$$

et de là $$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{ZA + EA}{EA} < \frac{\widehat{\Gamma\Delta A} + \widehat{E\Delta A}}{\widehat{E\Delta A}} = \frac{\widehat{\Gamma\Delta E}}{\widehat{E\Delta A}}.$$

Or on a $$\frac{\Gamma E}{EA} = \frac{\Gamma B}{BA} \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{\Gamma BA}}{\widehat{BDA}} = \frac{\text{arc } \Gamma B}{\text{arc } BA},$$

donc $$\frac{\Gamma B}{BA} < \frac{\text{arc } \Gamma B}{\text{arc } BA}.$$

Donc, si AB est la corde de 45′ et AΓ celle de 1°, comme AB = 0° 47′ 8″, on aura ΓA < 1° 2′ 50″. Si AB est la corde de 1°, et AΓ celle de 1° 30′, on aura AΓ = 1° 34′ 15″ ; donc AB > 1° 2′ 50″.

A l'approximation adoptée par Ptolémée, les deux limites de la corde de 1° sont égales; il prend la limite commune pour la valeur cherchée, et en tire celle de 30′.

On construit alors la table de 30 en 30 minutes jusqu'a 180°, en prenant les trentièmes parties des différences, ce qui permet d'obtenir sensiblement les valeurs des cordes de minute en minute. On vérifie à mesure à l'aide des théorèmes donnant les cordes des suppléments ou de la somme ou de la différence des cordes déjà obtenues.

A titre de curiosité, nous reproduirons le commencement et la fin de la table de Ptolémée en caractères grecs modernes. Nous rappelons que, dans la numération grecque, les unités sont représentées par les lettres α, β, γ, δ, ε, σ, ζ, η, θ; les dizaines, par les suivantes: ι, κ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϛ; les centaines, par celles-ci : ρ, etc., de sorte que 179, par exemple, s'écrit ροθ.

Κανονιον των εν κυκλω ευθειων.

Περιφερειων μοιρῶν		ευθειων M	Π	Δ	εξηκοστων M	Π	Δ	T
ō	λ′	ο	λα	κε	ō	α	β	ν
α	ō	α	β	ν	ō	α	β	ν
α	λ′	α	λδ	ιε	ō	α	β	ν
β	ō		ε	μ	ō	α	β	ν
β	λ′	β	λζ	δ	ō	α	β	μη
. . . .	.	. .	. .	. .	. .	. .	. .	.
ροη	λ′	ριθ	νθ	κδ	ō	ō	ō	μα
ροθ	ō	ριθ	νθ	μδ	ō	ō	ō	κε
ροθ	λ′	ριν	θθ	νδ	ō	ō	ō	θ
ρπ	ō	ρκ	ō	ō	ō	ō	ō	ō

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin**

387. — *Calculer* u_n, *sachant que*

$$u_0 = b, \quad u_1 = x \ldots \quad u_n = xu_{n-1} \pm u_{n-2}.$$

On trouve $u_n = x^n \pm (b + n - 2)x^{n-2} + \ldots$

u_n satisfait à l'équation différentielle :

$$[(2b-1)x^2 \pm 2b(b+1)]\frac{d^2 u_n}{dx^2} + 3x\frac{du_n}{dx} - n[(2b-1)n + 4 - 2b]u_n = 0.$$

Les signes supérieurs doivent être pris ensemble, les signes inférieurs également.

Cette équation différentielle donne le moyen d'avoir aisément la loi des coefficients.

Pour plus de généralité, on peut, dans les formules précédentes, remplacer x par $x + a$.

388. — *Calculer* u_n *sachant que*

$$u_0 = 1, \quad u_1 = x \pm 1, \ldots \quad u_n = xu_{n-1} - u_{n-2}.$$

On trouve $\quad u_n = x^n \pm x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} \pm \ldots$

u_n satisfait à l'équation différentielle :

$$(x^2 - 4)\frac{d^2u_n}{dx^2} + 2(x \pm 1)\frac{du_n}{dx} - n(n+1)u_n = 0,$$

qui permet d'obtenir aisément la loi des coefficients.

Dans ces formules, les signes doivent être pris parallèlement.

Pour plus de généralité, on peut y remplacer x par $x + a$.

389. — *Enveloppe de la droite symétrique de la tangente au sommet d'une parabole par rapport aux autres tangentes.*

On trouve un cercle dont le centre est le foyer et qui passe par le sommet.

390. — *Dans un triangle,* M *et* M_2 *étant deux points inverses,* r_a, r_b, r_c, r'_a, r'_b, r'_c, *les rayons des cercles inscrits dans les triangles* MBC, MAC, MAB, M_2BC, M_2AC, M_2AB. *Démontrer la relation :*

$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{a}{r'_a} + \frac{b}{r'_b} + \frac{c}{r'_c}.$$

On a
$$r_a = \frac{a}{\cot\frac{MBC}{2} + \cot\frac{MCB}{2}}.$$

391. — *Le plan étant partagé en une infinité de triangles équilatéraux formant carrelage, on ne peut y placer un carré dont les sommets coïncident avec des sommets de ces triangles.*

392. — *On partage la suite naturelle des nombres en tranches contenant la première un nombre, la seconde trois, ... la* n^e, 3^{n-1} *nombres. La somme des nombres de chaque tranche est un carré.*

393. — *D'un point* M *du plan d'un triangle, on abaisse les perpendiculaires* $MH_aH_bH_c$, $MH'_bH'_aH'_c$, $MH''_cH''_aH''_b$, *sur les côtés* BC, CA, AB *et rencontrant respectivement les côtés en* H_a, H_b, ...
Démontrer que :

1° *Si* S_1, S'_1, S''_1, *sont respectivement les aires des triangles* $H_aH'_bH''_c$, $H_bH'_cH''_a$, $H_cH'_aH''_b$, *on a entre ces aires la relation :*

$$S_1 = (S'_1 + S''_1)\cos A \cos B \cos C.$$

2° *Le lieu des points* M *tels que* H_b, H'_c, H''_a *soient en ligne droite est une conique circonscrite au triangle de référence. Le lieu des points* M, *tels que* H_c, H'_a, H''_b *soient en ligne droite, est une seconde conique, analogue à la précédente.*

3° *Les deux coniques en question, en dehors des sommets du triangle, ont un quatrième point commun, le point de Tarry.*

Si x, y, z, sont les coordonnées normales de M, on a :

$$2S_1 = yz \sin A + xz \sin B + xy \sin C,$$

$$2S'_1 \cos A \cos B \cos C = yz \sin C \cos B + xz \sin A \cos C + xy \sin B \cos A$$

$$2S''_1 \cos A \cos B \cos C = yz \sin B \cos C + xz \sin C \cos A + xy \sin A \cos B.$$

Les coniques dont il est question au § 2° sont les transformées par points inverses de deux droites remarquables déjà rencontrées (*J. M. E.*, année 1892, p. 158, Ex. n° 238). Ces coniques sont simultanément des hyperboles, des paraboles ou des ellipses, suivant que $\cot g\,\theta$ est inférieur, égal, ou supérieur à $\sqrt{7}$. (θ angle de Brocard de ABC.)

BACCALAUREATS

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

Calculer $\sin 2x$ sachant que $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$. (*)

Académie d'Alger.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donnés le rayon R de la base d'un cône et sa hauteur h, à quelle distance x du sommet faut-il mener un plan parallèle à la base

(*) L'équation proposée, élevée au carré, donne immédiatement le résultat cherché. L'angle $2x$, correspondant à cette équation, se construit, très simplement, en observant que l'on a

$$\sin 2x = \frac{24}{25}, \qquad \cos 2x = \frac{7}{25}.$$

Il suffit de construire un triangle rectangle dont les côtés sont 7, 24 ; l'hypoténuse est égale à 25.

On construit, si l'on veut, directement, l'angle x, en observant que l'équation proposée peut s'écrire

$$\sin(x - 45°) = \frac{\sqrt{2}}{10}, \text{ etc...}$$

pour que le volume du tronc soit égal à deux fois celui de la sphère qui aurait pour diamètre la hauteur du tronc?

II. — Trouver la latitude du lieu dans lequel l'ombre d'une tige verticale, au solstice d'été, et à midi vrai, a pour longueur la moitié de la hauteur de la tige.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — Inscrire dans un hémisphère donné, de rayon R, un tronc de cône dont le volume soit dans un rapport donné m avec la sphère qui pour diamètre la hauteur du tronc.

II. — *Questions au choix :* 1° Établir les formules qui permettent de calculer les angles d'un triangle lorsqu'on en connaît les côtés.

2° Résolution des équations de la forme $a \sin x + b \cos x = c$, dans laquelle a, b, c sont des nombres donnés.

3° Trois points A, B, C étant donnés sur un plan, trouver sur le plan un point O d'où les distances AB et BC sont vues sous des angles donnés α et β.

Académie de Besançon.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donné un demi-cercle de centre O de rayon R et dont AB est un diamètre. on demande de mener dans ce demi-cercle une corde MM′ parallèle à AB, de telle sorte qu'en désignant par S le point où la tangente en M rencontre AB prolongé, par MTM′ le plus petit des arcs sous-tendus par la corde MM′, par K et m deux nombres positifs donnés, on ait :

$$\text{Vol. MTM}' + k \text{ vol. MOM}' = m \text{ vol. SOM};$$

vol. MTM′, vol. MOM′ et vol. SOM désignant les volumes engendrés par le segment de cercle MTM′, le triangle MOM′ et le triangle MOS tournant autour de AB. — Discuter.

Académie de Bordeaux.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — *(a)* Formules d'addition pour le sinus et le cosinus;

(b) Démontrer que toutes les lignes trigonométriques de l'arc a s'expriment en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$;

(c) Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand x tend vers zéro.

II. — Une tige homogène pesante, de poids P et de longueur A, est mobile autour de son extrémité O. Au point A est attaché un cordon inextensible et sans pesanteur ABM qui passe sur une poulie infiniment petite B située sur la verticale du point O et à une distance $OB = h$; au cordon est suspendu un corps de poids π.

On demande : 1° De trouver l'angle $x (x = AOB)$ de la tige avec la verticale, lorsque le système est en équilibre;

2° De démontrer que si π est compris entre certaines limites (que l'on déterminera), les positions d'équilibre sont au nombre de trois.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Étant donnés dans un plan trois points A, B, C qui forment un triangle dont tous les éléments sont connus, déterminer, dans l'espace, le lieu des points M tels que l'on ait pour chacun d'eux : $\frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MC} = K$. — Discussion.

II. — Les autres compositions comme au baccalauréat classique.

Académie de Caen.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

En posant $$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$
calculer les diverses valeurs numériques que prend S_n lorsqu'on attribue à l'entier n les diverses valeurs particulières 1, 2, 3, 4 ; trouver, d'après les résultats obtenus, la formule générale qui donne la valeur de S_n pour n quelconque et vérifier ensuite la valeur de cette formule en prouvant que, si elle est vraie pour $n = k$, elle l'est encore pour $n = k + 1$.

I. — Les bases d'un tronc de cône ont : l'une 3 mètres, l'autre 5 mètres de rayon. Calculer, sans le secours des tables, et à 1 millimètre près, le rayon de la section menée, parallèlement aux bases, de manière à partager le solide considéré en deux troncs de cône équivalents.

II. — *Questions au choix :* 1° Déterminer la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique mixte.

2° Expliquer l'épure propre à déterminer l'angle d'un plan quelconque, donné par ses traces, avec un plan passant par la ligne de terre et faisant un angle connu avec le plan horizontal.

3° Démontrer que le mouvement apparent d'une planète, par rapport à la terre, est tantôt direct et tantôt rétrograde.

I. — Quel peut être le chiffre des unités d'un nombre N dont le carré N^2 se termine par un 6? — Faire voir que si N^2 se termine par un 6, le chiffre des dizaines de N^2 est nécessairement impair.

II. — *Questions au choix : (a)* Recherche du p. g. c. d. de deux nombres; *(b)* Les foyers et le grand axe d'une ellipse étant donnés, mener une tangente à cette courbe par un point donné dans le plan. Condition de possibilité.

(c) Réduire à deux forces un système quelconque de forces appliquées à un corps solide.

Académie de Clermont.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Volume engendré par un triangle rectangle tournant autour de son hypoténuse; entre quelles limites peut varier ce volume lorsque la longueur de l'hypoténuse est donnée?

II. — Définition du jour solaire moyen.

I. — Démontrer que dans un trièdre une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

II. — Déterminer sur une droite donnée BC un point M, de manière qu'un point mobile aille du point donné extérieur A au point B, donné sur cette droite, dans un temps donné t en parcourant la droite AM avec une vitesse donnée v, puis la droite MB avec une vitesse donnée V — Discussion.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. — *Questions au choix :* (*a*) Projection stéréographique;

(*b*) Inégalité des jours et des nuits;

(*c*) Lois de Kepler. Inégalité des saisons.

II. — On donne dans un triangle rectangle la somme l de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante et la surface s. Calculer les trois côtés du triangle. Condition de réalité.

Académie de Dijon.

BACCALAURÉAT COMPLET ET CLASSIQUE

I. — Démontrer que l'équation $\frac{m^2}{x-a} + \frac{n^2}{x-b} + c = 0$ a toujours ses racines réelles (*).

II. — Dans un triangle, on donne un côté a et les deux angles adjacents B et C $(B < C)$. On demande d'exprimer en fonction de ces données : 1° la longueur h de la hauteur du triangle issue du sommet A opposé au côté a; 2° la longueur m de la médiane issue du même sommet; 3° les longueurs p et q de la bissectrice de l'angle A et de la bissectrice de l'angle extérieur adjacent à celui-ci.

III. — Étant données les équations

$$x^2 + px + q = 0, \qquad x^2 + p'x + q' = 0,$$

Calculer $(\alpha - \alpha')(\beta - \beta')(\beta - \alpha')(\alpha - \beta')$; α, β, désignant les racines de la première; α', β', celles de la seconde (**).

IV. — Démontrer la propriété de la tangente en un point de l'ellipse.

V. — Démontrer que si l'on désigne par V le volume d'un segment quelconque, par h sa hauteur, par c le rayon du cercle de la sphère dont le plan est parallèle aux bases du segment et à égale distance de chacune d'elles, on a

$$V = \pi c^2 h - \frac{\pi h^3}{12}.$$

(*) On observe qu'il y a une racine comprise entre a, b. Le procédé le plus simple, pour l'établir, consiste à rendre à l'équation *la forme entière*, et à substituer a, b.

(**) La fonction proposée représente la condition nécessaire et suffisante pour que les équations aient une racine commune. On sait que cette condition, que l'on peut trouver par des procédés divers, est

$$(q - q')^2 = (p - p')(pq' - qp').$$

On peut aussi la calculer directement, en observant que la fonction proposée est

$$(\alpha^2 + p'\alpha + q')(\beta^2 + p'\beta + q');$$

on a une fonction symétrique de α, β, etc...

QUESTION 257 (*)

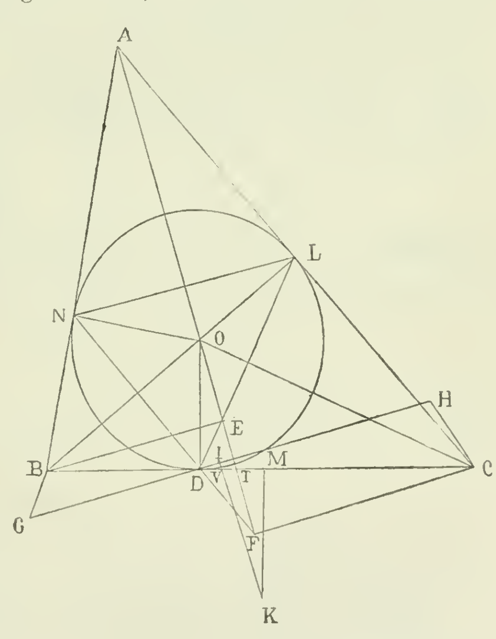
Solution, par M. de Times.

ABC *étant un triangle donné, soit* D *le point de contact avec* BC, *du cercle inscrit* O. *On projette les sommets* B, C *en* E, F *sur la bissectrice* AO ; *puis l'on construit les parallélogrammes* DEBG, DFCH.

Cela posé : 1° les points B, G, C, H, *appartiennent à une circonférence ; 2° le centre de cette circonférence et le centre* O *du cercle inscrit sont également distants du côté* BC. (E. Catalan.)

T étant le point de rencontre de la bissectrice AO et du côté BC, les triangles BET, ODT sont semblables et on a la proportion

$$\frac{ET}{DT} = \frac{BT}{OT}.$$



Il suit de là que les triangles EDT, OBT ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels et sont aussi semblables. On a donc

$$\widehat{EDT} = \widehat{BOT} = 1^{dr} - \frac{1}{2} C$$

et la droite DE est perpendiculaire à CO et joint les points de contact D, L du cercle inscrit. On verrait

(*) Nous avons reçu, trop tardivement pour pouvoir les mentionner, deux solutions de la question 580 (Voir *Journal*, p. 95). L'une de M. Georges Rodriguez, étudiant à Medellin (Colombie) ; l'autre, de M. A. Bozal-Obejero, professeur à l'Institut de Bilbao (Espagne).

de même que la droite DF se confond avec la corde de contact DN.

Cela posé, il est facile de vérifier que les triangles BDE CDF sont semblables ; on a donc

$$\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CF}}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{DG.DH} = \mathrm{DC.DB};$$

ce qui établit la première partie du théorème.

On arrive encore au même résultat comme il suit :

On a $$\mathrm{DB.DC} = (p-b)(p-c),$$

et $$\mathrm{DG.DH} = \mathrm{BE.CF} = bc \sin^2 \frac{1}{2}\mathrm{A} = (p-b)(p-c), \text{ etc.}$$

2° Soient M et I les milieux de BC et de GH et par ces points menons des perpendiculaires respectivement à ces deux droites. Ces perpendiculaires se coupent au point K, centre du cercle passant par les points B, G, C, H. Les triangles VMK, ODT sont semblables et, pour établir leur égalité, il suffit de faire voir qu'ils ont un côté égal, par exemple que MV = DT ou que MT = DV.

on a $$\mathrm{MT} = \frac{1}{2}a - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)};$$

on a aussi $$\mathrm{GI} = \frac{1}{2}\,\mathrm{GH} = \frac{1}{2}(\mathrm{BE}+\mathrm{CF}),$$

ou $$\mathrm{GI} = \frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}\mathrm{A},$$

et $$\mathrm{DG} = c \sin\frac{1}{2}\mathrm{A},$$

d'où $$\mathrm{DI} = \frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}\mathrm{A}.$$

Or, $$\mathrm{DV} = \frac{\mathrm{DI}}{\cos.\mathrm{IDV}} = \frac{(b-c)\cos\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{C})}{2\cos\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{C})} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)};$$

les valeurs de MT et de DV étant égales, on en conclut l'égalité des droites MK et OD.

QUESTION 561

Solution par M. H. Dellac.

Démontrer que deux triangles sont semblables lorsque les cosinus de leurs angles sont proportionnels. (H. Dellac.)

Entre les angles d'un triangle, on a la relation

$$S + 2P = 1$$

en posant

$S = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C, \qquad P = \cos A . \cos B . \cos C.$

On a, par hypothèse,

$$\frac{\cos A}{\cos A'} = \frac{\cos B}{\cos B'} = \frac{\cos C}{\cos C'} = \lambda.$$

Donc, en substituant,

$$\lambda^2 S' + 2P'\lambda^3 = 1.$$

Mais on doit avoir aussi

$$S' + 2P' = 1;$$

éliminant S', on a

$$\lambda^2 - 1 + 2\lambda^2 P'(\lambda - 1) = 0.$$

On trouve d'abord $\lambda = 1$; à cette solution correspond la similitude des deux triangles.

Reste à faire voir que les autres solutions ne peuvent convenir. Elles sont données par l'équation

$$2P'\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

D'abord, les racines de cette équation sont toujours réelles. En effet, le discriminant $1 - 8P'$ est positif, le produit P' étant maximum lorsque les trois angles sont égaux; alors les cosinus sont égaux à $\frac{1}{2}$.

Supposons que les trois angles A', B', C' soient aigus; P' est positif, et les deux racines sont négatives. Elles donnent pour A, B, C trois angles obtus, ce qui est impossible.

Supposons que le triangle $A'B'C'$ ait un angle obtus; il ne peut en avoir davantage.

Alors P' est négatif, et, en posant $P' = -P_1$, l'équation devient

$$f(\lambda) = 2P_1\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Cette équation a une racine négative qui ne convient pas, nous avons vu pourquoi. Démontrons que la racine positive λ ne convient pas non plus.

Pour qu'elle convînt, il faudrait que l'on eût simultanément

$$\lambda^2 \cos^2 A' < 1, \quad \lambda^2 \cos^2 B' < 1, \quad \lambda^2 \cos^2 C' < 1,$$

d'où

$$\lambda^2 S' < 3, \qquad \lambda < \sqrt{\frac{3}{S'}}.$$

Je dis que cette dernière condition n'est pas remplie. On a

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{S'}}\right) = \frac{6P_1 - S' - \sqrt{3S'}}{S'},$$

et comme

$$2P_1 = S' - 1,$$

il vient

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{S'}}\right) = \frac{2S' - 3 - \sqrt{3S'}}{S'}.$$

Comme S' est positif, il suffit de chercher le signe du numérateur : je dis que c'est toujours le signe $-$. Si l'on avait $2S' - 3 < 0$, ce serait évident; examinons donc le cas de $2S' - 3 > 0$. Je dis que l'on a

$$2S' - 3 < \sqrt{3S'} \quad \text{ou} \quad (2S' - 3)^2 < 3S',$$

ou

$$(4S' - 3)(S' - 3) < 0.$$

Or, l'hypothèse $2S' - 3 > 0$ donne *a fortiori* $4S' - 3 > 0$; d'ailleurs, S' est évidemment plus petit que 3. Donc l'inégalité est vérifiée.

Ainsi $f\left(\sqrt{\frac{3}{S'}}\right)$ est de signe contraire au premier terme de l'équation, et par suite la quantité $\sqrt{\frac{3}{S'}}$ est comprise entre les deux racines; il est donc plus petit que la racine positive λ.

La seule valeur de λ admissible est donc $\lambda = 1$, ce qui conduit à la similitude et démontre le théorème.

On démontrerait de même que deux triangles sont semblables lorsque les sinus des demi-angles sont proportionnels; ou, ce qui revient au même, lorsque les distances des sommets aux centres des cercles inscrits sont proportionnelles.

QUESTION 574

Solution par M. Antoine DAVIDOGLOU, élève au lycée de Berlad.

M. de Longchamps a considéré dans le triangle ABC *les trois cercles* A(a), B(b), C(c) *et a montré, le premier, leur importance :*

Démontrer que les rayons des cercles tangents à ces trois cercles et qui les laissent tous les trois à l'extérieur, ou tous les trois à l'intérieur, ont pour valeur, respectivement :

$$\rho' = \frac{2p(p - 2R - r)}{2p - \delta}, \qquad \rho'' = \frac{2p(2R + r + p)}{2p + \delta}.$$

Les autres groupes de cercles tangents ont pour rayons

$$\rho'_a = \frac{2(p - a)[R - r_a - (p - a)]}{2(p - a) - \delta_a},$$

$$\rho''_a = \frac{2(p - a)[-2R + ra - (p - ar]}{2(p - a) + \delta_a} \quad etc.$$

δ, δ_a ... *représentant les quantités* $4R + r$, $4R - r_a$, *etc.*

(E. Lemoine.)

Lemmes. — On a : $\Sigma ab = p^2 + r\delta$; $\Sigma a^2b^2 = 4r^2p^2 + (p^2 - r\delta)^2$; $\Sigma a^2 = 2(p^2 - r\delta)$; $\Sigma a^3 = 2p(p^2 + 6Rr - 3r\delta)$; $\Sigma a^4 = 2[(p^2 - r\delta)^2 - 8r^2p^2]$; $\Sigma a^5 = 2p[p^2(p^2 + 10Rr) - 5r(2R + r)(2p^2 - r\delta)]$; $\Sigma a^6 = 4p^2 (p^2 + 6Rr - 3r\delta)(p^2 + 2Rr - 3r\delta) - 16Rrp^2(p^2 - r\delta) - 2(p^2 + r\delta) (4r^2p^2 + (p^2 - r\delta)^2)$. (*Journal*, 1894 ; p. 139).

Si ω est le centre du cercle tangent extérieurement, on a, en posant

$$\widehat{B\omega C} = \alpha, \qquad \widehat{C\omega A} = \beta, \qquad \widehat{A\omega B} = \gamma,$$

$$\cos\alpha = \frac{(\rho - b)^2 + (\rho - c)^2 - a^2}{2(\rho - b)(\rho - c)}; \qquad \cos\beta = \qquad \text{etc.};$$

alors, au moyen de la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

on obtient, toutes simplifications faites, une équation du second degré en ρ, $A\rho^2 + B\rho + C = 0$, les coefficients étant :

$$A = -9\Sigma a^4 + 8p\Sigma a^3 + 2\Sigma a^2b^2 - 8p.a.b.c = 16r^2(4p^2 - \delta^2),$$

$$B = 4[\Sigma a^5 + 3p\Sigma a^4 - 4p^2\Sigma a^3 + 2abc\Sigma a^2 + abc\Sigma ab] = 64pr^2[\delta(2R + r) - 2p^2],$$

$$C = 4[2p\Sigma a^5 + 2p^2\Sigma a^4 - abc\Sigma a^3 - a^2b^2c^2] = 64p^2r^2[p^2 - (2R + r)^2].$$

On a alors :

$$(4p^2 - \delta^2)\rho^2 + 4p[\delta(2R + r) - 2p^2]\rho + 4p^2[p^2 - (2R + r)^2] = 0,$$

et on voit aisément que cette équation a pour racines ρ', ρ''.

Les autres couples de rayons se déduisent immédiatement de celles-ci, appliquant la transformation continue respectivement en A, B, C.

QUESTION 586

Solution par M. A. Droz-Farny.

Le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre est sur la ligne des centres de ces deux circonférences. (E. Foucart.)

Le théorème proposé est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale. Si un polygone peut être inscrit dans une circonférence et circonscrit à une autre, il en existe une infinité; les diagonales de ce polygone enveloppent des circonférences appartenant au faisceau déterminé par les deux premières; si le polygone a un nombre pair de côtés, les diagonales joignant les points opposés, comme appartenant à deux polygones différents d'un même nombre de côtés ne peuvent envelopper qu'un cercle point, un des points de Poncelet du système des deux circonférences.

Nota. — M. Négrétzu nous fait observer que cette question 586 se trouve complètement traitée dans les *Exercices de géométrie analytique*, par M. J. Koehler (p. 3). On y trouve encore diverses propriétés du quadrilatère inscriptible et circonscriptible.

La question peut d'ailleurs être traitée géométriquement en s'appuyant sur le théorème de Brianchon et en considérant la figure comme un hexagone circonscrit.

QUESTION 601

Solution par M. Alfred Champion.

On donne, dans l'espace, un point O *et une circonférence sur laquelle se trouvent les sommets* A, B, C, D *d'un quadrilatère convexe. Démontrer la relation*

$$\mathrm{AB.BD.AD.}\overline{\mathrm{OC}}^2 + \mathrm{BC.CD.BD.}\overline{\mathrm{OA}}^2 = \mathrm{AB.BC.AC.}\overline{\mathrm{OD}}^2 + \mathrm{AC.CD.AD.}\overline{\mathrm{OB}}^2.$$

(Mannheim.)

Le théorème de Stewart, appliqué aux triangles OAC, OBD, donne

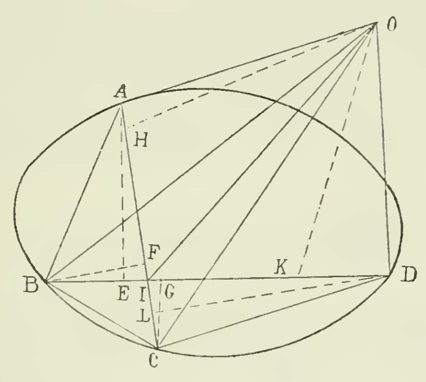
(1) $\overline{OI}^2.AC = \overline{OA}^2.IC + \overline{OC}^2.AI - AI.IC.AC,$

(2) $\overline{OI}^2.BD = \overline{OB}^2.DI + \overline{OD}^2.BI - BI.DI.BD.$

Multipliant (1) par BD et (2) par AC, on obtient :

$\overline{OI}^2.AC.BD = \overline{OA}^2.IC.BD + \overline{OC}^2.AI.BD - AI.IC\,BD.AC$

$\overline{OI}^2.BD.AC = \overline{OB}^2.DI.AC + \overline{OD}^2.BI.AC - BI.DI\,BD.AC$



Retranchant et observant que BI.DI = AI.IC, il vient :

(3) $\overline{OA}^2.IC.BD + \overline{OC}^2.AI.BD = \overline{OB}^2.DI.AC + \overline{OD}^2.BI.AC.$

Abaissons les perpendiculaires des sommets A, B, C, D sur les diagonales. On a, évidemment, $\frac{IC}{AI} = \frac{CG}{AE}$ et $\frac{DI}{BI} = \frac{DL}{BF}$.

Remplaçant dans (3) les quantités IC,AI,DI,BI par les quantités proportionnelles CG,AE,LD,BF, il vient :

$$\overline{OA}^2.CG.BD + \overline{OC}^2.AE.BD = \overline{OB}^2.LD.AC + \overline{OD}^2.BF.AC,$$

ou $\overline{OA}^2.2\text{ surf. }BCD + \overline{OC}^2.2\text{ surf. }ABD$

$$= \overline{OB}^2\,2\text{ surf. }ADC + \overline{OD}^2\,2\text{ surf. }BAC.$$

Multipliant chaque membre par 2R et appliquant la relation $abc = 4RS$, il vient enfin :

$$AB.BD.AD.\overline{OC}^2 + BC.CD.BD.\overline{OA}^2$$
$$= AB.BC.AC.\overline{OD}^2 + AC.CD.AD.\overline{OB}^2.$$

Conséquences (*). — La relation peut encore s'écrire

$$\overline{OA}^2.BCD + \overline{OC}^2.ABD = \overline{OB}^2.ACD + \overline{OD}^2.ABC$$

(*) Ce paragraphe est de M. Jean NÉGRÉTZU.

(ABC, ACD, ... sont les aires des triangles ABC, ACD ...); on trouve ainsi géométriquement la condition pour que quatre points A, B, C et D soient sur un même cercle.

Dans le cas où le quadrilatère est un rectangle ou un carré, on a ABC = ACD = ..., et la relation se réduit à

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2.$$

Au moyen de cette dernière relation on peut résoudre facilement le problème suivant :

Soit OABCD *une pyramide dont la base* ABCD *est un carré ou un rectangle. Considérons les projections* A′, D′ *des sommets* A, D *respectivement sur les côtés opposés* OC, OB. *Démontrer que les triangles tels que* OA′D′. *sont semblables aux triangles tels que* OBC.

Dans les triangles AOC, DOB, on a

$$\overline{DB}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OB}^2 - 2OB \times OD'$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times OA'.$$

Et, en retranchant membre à membre,

$$OD^2 + \overline{OB}^2 - 2OB \times OD' = OA^2 + \overline{OC}^2 - 2OC \times OA'.$$

Et, en vertu de la relation précitée,

$$OB \times OD' = OC \times OA',$$

ou

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OD'}.$$

Les deux triangles OA′D′, OBC ayant un angle commun compris entre côtés proportionnels, sont semblables.

Enfin, si l'on fait les projections des points A, D, ... sur les côtés non opposés, les droites telles que A′D′ ... sont parallèles aux droites telles que BC ...

Remarque par l'auteur de la Question 601.

C'est en 1890, dans le *Messenger of Mathematics* que je suis arrivé, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, au théorème qui fait l'objet de la question 601.

J'ai signalé alors le cas particulier où, la circonférence étant réduite à une droite, le point O est sur cette droite. La relation (3) conduit, dans ce cas, à une relation concernant cinq points en ligne droite qui avait été donnée, sans démonstration,

par Chasles dans son *Aperçu historique*. Aujourd'hui, je ferai remarquer que si le point O appartient à l'axe du cercle, ses distances aux sommets du quadrilatère sont égales. On peut alors supprimer ces distances dans la relation (3), on est ainsi conduit à la relation qui donne le rapport des diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle, au moyen des côtés.

Si le point O est confondu avec l'un des sommets du quadrilatère, la relation (3) conduit à l'expression du produit des diagonales de ce quadrilatère, en fonction des côtés. Ainsi : *les deux théorèmes classiques concernant les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans un cercle peuvent s'obtenir comme conséquences d'un même théorème.*

QUESTIONS PROPOSÉES

642. — On donne un angle droit AIX et sur l'un des côtés un point fixe A. Sur IX on considère deux points variables B, C tels que IB.IC = K. 1° Démontrer que l'orthocentre du triangle variable ABC est fixe. 2° Trouver le lieu du centre du cercle ABC. 3° Faire voir que pour chaque position de ABC où l'un des angles est obtus il y a une infinité de quadrilatères inscriptibles où les diagonales et les côtés opposés se coupent aux trois sommets de ABC, et que tous ces quadrilatères sont inscrits dans un même cercle qui reste invariable quand B et C varient. *(Bernès.)*

643. — Si ABCD est un quadrilatère inscriptible et M, P, Q les points de concours des côtés opposés ou des diagonales, les puissances des trois points M, P, Q relativement au cercle ABCD sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques relativement au triangle MPQ de l'orthocentre de ce triangle. En conclure que les deux cercles MPQ, ABCD ont pour axe radical l'axe orthique du triangle MPQ. *(Bernès.)*

644. — A et B étant deux points fixes, M un point variable du plan, sur la tangente en B au cercle ABM on porte $BM' = K.\frac{BM}{AM}$ où K est une longueur constante, le lieu de M

étant donné, trouver le lieu de M'. Montrer que si le lieu de M est une droite ou une circonférence, celui de M' est généralement un cercle. *(Bernès.)*

645. — On donne un parallélogramme *oaba'*. Sur la droite *ab*, on prend arbitrairement le point *m* que l'on projette orthogonalement en *n* sur *oa* et ce point *n* est projeté de même en *p* sur *ab*. La droite *po* coupe *a'b* en *m'* que l'on projette en *n'* sur *oa'* et ce point *n'* est projeté en *p'* sur *a'b*. Démontrer que les points *m*, *o*, *p'* appartiennent à une même droite. *(Mannheim.)*

646. — Dans la circonférence circonscrite à ABC, AA_1, AA_2 étant deux cordes rectangulaires, si β, γ sont les points où BA_1; CA_1 rencontrent AA_2, les cerles ABβ, ACγ sont orthogonaux au cercle ABC. Généraliser en supposant que les cordes AA_1, AA_2 fassent un angle donné α. *(Bernès.)*

647. — Les médiatrices de AC, AB dans le triangle ABC rencontrent en β, γ, la médiane AD. Démontrer que Cβ, Bγ se coupent en M sur la symédiane et que AM est perpendiculaire sur OM, O étant le centre de la circonférence ABC. *(Bernès.)*

648. — H étant l'orthocentre du triangle ABC, S le point diamétralement opposé à A sur le cercle ABC, β, γ les points où BH, CH rencontrent AS, démontrer que le point où se coupent les cercles ABβ, ACγ est la projection de H sur la médiane AD. *(Bernès.)*

649. — M et N sont deux points quelconques du plan du triangle ABC, symétriques l'un de l'autre relativement au milieu D de BC. Si β et γ sont les points où BN, CN coupent AM, et que M' soit le point de rencontre des tangentes en B et C aux circonférences ABβ, ACγ, démontrer que si M parcourt une droite ou un cercle, M' parcourt généralement un cercle. Plus généralement, le lieu de M étant donné, quel est celui de M'? — Faire voir que les tangentes en M et M' aux deux lieux se coupent sur la circonférence AMM'.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11040-5-95.

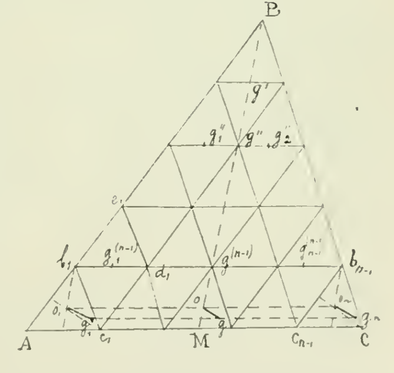
SIMPLES REMARQUES SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ
DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

Par M. **E. Brand.**

POINSOT (*) a déterminé le centre de gravité d'un triangle en se servant d'une décomposition particulière de cette surface qui nous suggère les considérations suivantes :

1. — Désignons par $\mathfrak{CMD}$ le centre des moyennes distances et par $\mathfrak{CG}$ le centre de gravité.

Rappelons que le $\mathfrak{CMD}$ des sommets d'un triangle est au point de croisement des trois médianes de ce triangle (droites qui se coupent au tiers de leur longueur à partir des côtés) et que le $\mathfrak{CMD}$ des sommets d'un tétraèdre est au point de rencontre des droites joignant un sommet au $\mathfrak{CMD}$ des trois autres (droites qui se coupent au quart de leur lon-gueur à partir des faces du tétraèdre).



Pour abréger le discours, au lieu de dire : le $\mathfrak{CMD}$ des sommets du triangle et le $\mathfrak{CMD}$ des sommets du tétraèdre, nous emploierons les expressions : $\mathfrak{CMD}$ du triangle et $\mathfrak{CMD}$ du tétraèdre.

Cela étant, soit un triangle ABC (*fig. 1*) décomposé au moyen de droites équidistantes et parallèles à chacun de ses côtés, en n^2 triangles égaux, semblables au triangle primitif et formés d'une substance

(*) *Éléments de statique*, 11e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1873; p. 145.

non homogène, mais, néanmoins, identique pour tous les triangles constitutifs (*), alors :

Théorème. — *Le* $\mathfrak{CG}g_1$ *d'un triangle constitutif* Ab_1c_1 *étant à une distance* δ *du point* o_1, $\mathfrak{CMD}$ *de ce triangle, le* $\mathfrak{CG}G$ *du triangle* ABC *sera à une distance* $\frac{\delta}{n}$ *du point* O, $\mathfrak{CMD}$ *du triangle primitif et la droite* OG *sera parallèle à* o_1g_1.

En effet, le triangle ABC peut être considéré comme composé de n triangles égaux à Ab_1c_1 disposés le long de la base AC et de $\frac{n^2-n}{2}$ parallélogrammes égaux tels que $b_1c_1d_1e_1$.

Les $\mathfrak{CG}g_1 \ldots g_n$ des triangles tels que $Ab_1c_1, \ldots c_{n-1}b_{n-1}C$ seront équidistants et situés sur une parallèle à AC. Le $\mathfrak{CG}$ de ces n points isolés sera le point g, au milieu de g_1g_n, ce point g aura une charge n, si on représente par 1 le poids du triangle Ab_1c_1.

Si on appelle $o_1 \ldots o_n$ les $\mathfrak{CMD}$ des triangles $Ab_1c_1, \ldots o_{n-1}b_{n-1}C$ et o le milieu de o_1o_n, la droite og sera parallèle et égale à $o_1g_1, \ldots o_ng_n$.

Le $\mathfrak{CG}$ de chaque parallélogramme se trouvera au centre de figure de chacun de ceux-ci, de sorte que l'ensemble des parallélogrammes fournira des $\mathfrak{CG}$ auxiliaires distribués sur des droites parallèles équidistantes, la première contenant un point g', la seconde deux points g''_1 et g''_1, ... la $(n-1)^e$ contenant $n-1$ points $g_1^{(n-1)} \ldots g_{n-1}^{(n-1)}$, chaque point ayant une charge 2.

Les points d'une même ligne donneront un $\mathfrak{CG}$ situé au milieu de la ligne, de manière qu'en fin de compte, il restera

(*) Par *triangles égaux de substance identique, quoique non homogène,* il faut entendre des triangles soumis aux conditions suivantes :

1° Les triangles sont superposables ;

2° La substance de chacun d'eux n'est pas homogène, c'est-à-dire que la densité des différents points n'est pas constante ;

3° Si on superpose les triangles, la loi de la densité est unique pour les surfaces superposées, c'est-à-dire que la densité a la même valeur pour les points qui coïncident.

une série de points g', g'', ... $g^{(n-1)}$ situés sur la médiane BOM et ayant des charges représentées respectivement par 2, 4, ... $2(n-1)$.

Le CGγ de ces points g', ... $g^{(n-1)}$ sera sur BM à une distance du point B que l'on détermine par la formule des moments polaires. En appelant μ la n^e partie de BM et prenant le point B comme pôle, on aura

$$B\gamma = \frac{2\times\mu + 4\times 2\mu + 6\times 3\mu + \ldots + 2(n-1)\times(n-1)\mu}{2+4+6+\ldots+2(n-1)}$$

ou bien

$$B\gamma = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{1+2+3+\ldots+(n-1)}\mu = \frac{\frac{n(n-1)(2n-1)}{2.3}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n-1}{3}\mu,$$

ou, encore, en désignant par m la médiane,

$$B\gamma = \frac{(2n-1)m}{3n}.$$

La question revient maintenant à trouver le CGG des deux points γ et g; leurs charges respectives étant $n(n-1)$ et n, la charge totale sera n^2.

Le point G (*fig. 2*), sera déterminé par le rapport

$$\frac{\gamma G}{\gamma g} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Si on mène GO parallèle à go, on aura évidemment

$$\frac{OG}{og} = \frac{1}{n},$$

d'où

$$OG = \frac{og}{n} = \frac{o_1g_1}{n} = \frac{\delta}{n};$$

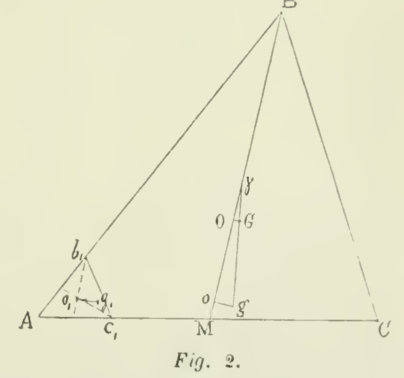


Fig. 2.

de plus, le point O sera le point de croisement des médianes du triangle ABC, il suffit de prouver que OM est égal à $\frac{m}{3}$.

On a, en effet, $\gamma O : \gamma o = 1 : n,$

d'où $$\gamma O = \frac{\gamma o}{n};$$

or, à cause de

$$oM = \frac{m}{3n}, \qquad \gamma B = \frac{(2n-1)m}{3n} \qquad \text{et} \qquad BM = m,$$

il vient

$$\gamma o = BM - B\gamma - oM = m\left(1 - \frac{2n-1}{3n} - \frac{1}{3n}\right) = \frac{m}{3},$$

donc,
$$\gamma O = \frac{m}{3n},$$

et
$$OM = \gamma o - \gamma O + oM = \frac{m}{3} - \frac{m}{3n} + \frac{m}{3n} = \frac{m}{3}.$$

C. Q. F. D.

Conséquences. — *a)* Si l'on considère (*fig.* 3) les triangles a_1Bc_1, a_2Bc_2. ... $a_{n-1}Bc_{n-1}$, ABC ayant un sommet commun et leurs aires respectivement proportionnelles aux nombres $1, 4, \ldots (n-1)^2, n^2$, — ces triangles étant constitués au moyen de a_1Bc, de la même manière que dans le Théorème — les $\mathfrak{C}\mathfrak{G}\, g_1, g_2, \cdots g_{n-1}, G$ sont des points d'une même branche d'hyperbole dont le centre est en B, l'une des asymptotes est la médiane et l'autre une droite parallèle à o_1g_1, ... OG.

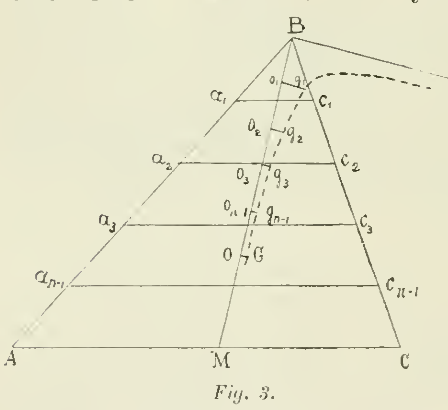


Fig. 3.

b) Si l'on divise un triangle ABC en quatre triangles égaux, puis le triangle central A'B'C' en quatre autres triangles égaux, et ainsi de suite, le n^{ième} triangle étant, par exemple, *abc*, les $\mathfrak{C}\mathfrak{M}\mathfrak{D}$ de ces triangles seront confondus en un seul point O.

Le Théorème sera applicable, si l'on suppose que les triangles égaux sont de même substance, quoique non homogène.

Si g (*fig.* 4) est le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de *abc*, G^{n-1}, le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de $A^{n-1}B^{n-1}C^{n-1}$,

sera situé sur Og, mais du côté opposé à g, par rapport à O, et OG^{n-1} vaudra $\frac{Og}{2}$; G^{n-2}, le $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ de $A^{n-2}B^{n-2}C^{n-2}$, sera situé

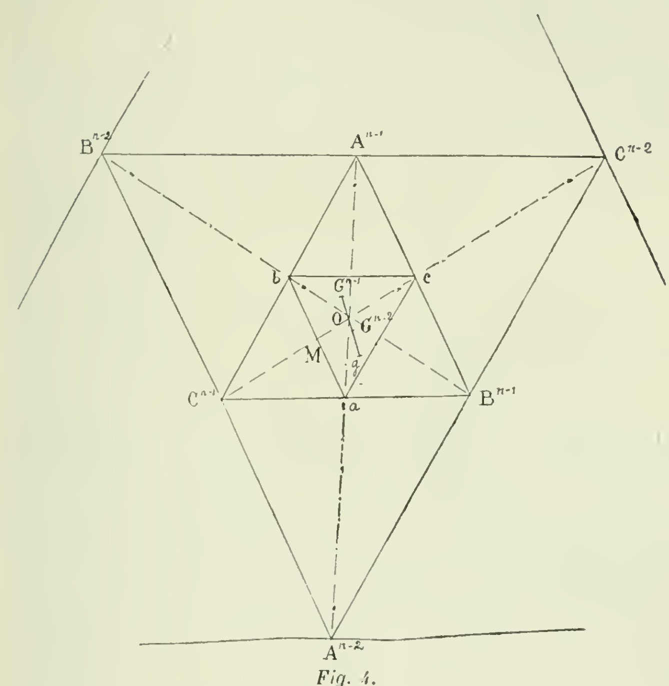


Fig. 4.

sur Og, du même côté que g et OG^{n-2} vaudra $\frac{OG^{n-}}{2}$, et ainsi de suite; si l'on désigne par 1, 2, 3, 4 ... les $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ des triangles successifs, on aura la disposition suivante *(fig. 5)*.

2 4 3 1

0

Fig. 5.

Le point O sera toujours compris entre deux $\mathfrak{C}\mathfrak{G}$ dont les numéros d'ordre seront de parités contraires.

La *fig. 5* n'est d'ailleurs que la traduction graphique de la formule

$$\frac{1}{3} = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots\right).$$

On peut donc considérer ces points comme donnant, par approximations successives, la position du point O, qui n'est que le $\mathfrak{CG}$ de tous les triangles centraux, dans le cas de l'homogénéité de la substance.

c) Si l'on admet que les $\mathfrak{CG}$ de deux triangles, ou plus généralement de deux polygones, semblables et de même substance sont des points homologues, on peut déduire du Théorème une démonstration de la coïncidence du $\mathfrak{CG}$ d'un triangle homogène avec le $\mathfrak{CMD}$ de ce triangle.

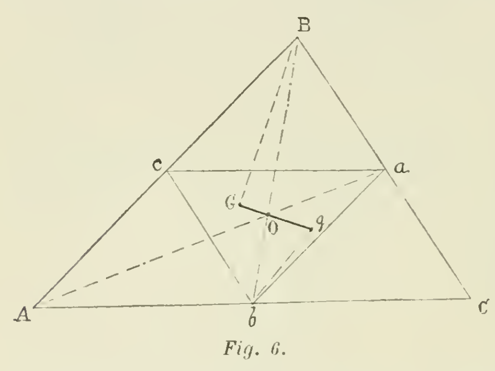


Fig. 6.

En effet, supposons *(fig. 6)* un triangle homogène ABC divisé en quatre triangles égaux et semblables au premier et soit g le $\mathfrak{CG}$ de abc; en vertu du Théorème, le $\mathfrak{CG}$G du triangle ABC sera sur Og et du côté opposé à g, par rapport au point O, et on aura $OG = \frac{Og}{2}$.

Comme bg est égale à la moitié de BG, quelles que soient la grandeur et la direction de Og, BG ne pourra pas être, dans ABC, l'homologue de bg du triangle abc, à moins que Og ne soit nul; alors, G, O et g coïncident.

C. Q. F. D.

d) Si on reprend le Théorème dans le cas d'une substance homogène, la division du triangle ABC *(fig. 4)* en triangles plus petits pourra être poussée aussi loin que l'on voudra, sans que la répartition des densités des différents points des triangles constitutifs égaux change de l'un à l'autre triangle.

En supposant qu'on ait pris g, comme centre de gravité du triangle homogène Ab_1c_1, l'erreur commise δ sera réduite à $\frac{\delta}{n}$ dans le triangle ABC. Or, comme on peut augmenter

n indéfiniment, ce qui fait tendre δ vers zéro, la quantité $\frac{\delta}{n}$ pourra devenir plus petite que toute quantité donnée, donc nulle; le *point* O *sera le* CG *du triangle homogène* ABC.

2. — Soit un tétraèdre ABCD décomposé, au moyen de $(n-1)$ plans équidistants et parallèles à chacune de ses faces, en trois espèces de solides :

1° $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$ tétraèdres égaux entre eux et semblables au tétraèdre primitif, constituant une pile triangulaire de côté n

2° $\frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}$ octaèdres possédant chacun un centre de symétrie et formant une pile triangulaire de côté de $n-1$;

3° $\frac{(n-2)(n-1)n}{1.2.3}$ tétraèdres symétriques de ceux du 1°, disposés en une pile triangulaire de côté $n-2$.

Soient, de plus, les tétraèdres du 1° formés d'une substance non homogène, néanmoins identique pour tous les tétraèdres, et telle que les densités de tous les points soient respectivement les mêmes que celles des points symétriques des tétraèdres du 3°, lesquels seront alors formés d'une substance non homogène, néanmoins identique pour tous ces tétraèdres.

Soient, enfin, dans les octaèdres du 2°, les points symétriques ayant des densités égales. Alors :

Théorème. — *Le* CGg_1 *d'un tétraèdre constitutif* $Ab_1c_1d_1$ *étant à une distance* δ *de* o_1, CMD *de ce tétraèdre, le* CG G *du tétraèdre* ABCD *sera à une distance* $\frac{\delta}{n}$ *de* O, CMD *du tétraèdre primitif, et la droite* OG *sera parallèle à* o_1g_1.

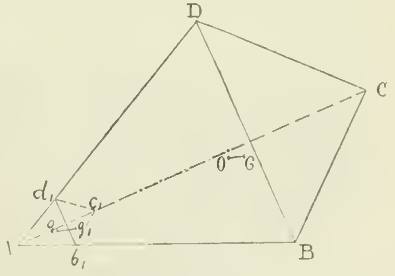


Fig. 7.

Il est facile de reconnaître que si g_1 est le CG du tétraèdre $Ab_1c_1d_1$ *(fig. 7)* et si δ est la distance de g_1 à o_1, CMD de ce petit tétraèdre.

le $\mathfrak{CG}$ G_1 de la pile triangulaire du 1° sera encore à la distance δ du point O, et que OG_1 sera parallèle à o_1g_1.

De même pour la pile triangulaire du 3°, seulement OG_3 qui vaudra OG_1 sera dirigé en sens opposé.

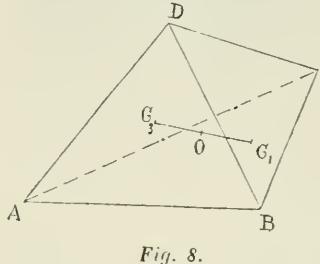


Fig. 8.

Quant au $\mathfrak{CG}$ de la pile du 2°, il sera au point O lui-même.

On aura donc la disposition indiquée par la *fig. 8*.

Les charges en G_1, O et G_3 seront respectivement :

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\quad \frac{4(n-1)n(n+1)}{6}\quad \text{et}\quad \frac{(n-2)(n-1)n}{6},$$

le poids d'un tétraèdre du 1° étant représenté par 1.

Le $\mathfrak{CG}$ G' de G_1 et G_3 sera donné par

$$G_1G' = \frac{\dfrac{(n-2)(n-1)n}{6}}{\dfrac{(n-2)(n-1)n + n(n+1)(n+2)}{6}}\, G_1G_3$$

ou
$$G_1G' = \frac{(n-2)(n-1)}{n^2+2}\,\delta.$$

d'où
$$OG' = OG_1 - G'G_1 = \frac{3n}{n^2+2}\,\delta.$$

La charge du point G' sera $\dfrac{2(n^2+2)n}{6}$, celle du point O $\dfrac{4n(n^2-1)}{6}$, donc la charge totale sera égale à n^3.

Dès lors, le $\mathfrak{CG}$ définitif G, qui coïncide avec celui des points O et G', sera déterminé par

$$OG = \frac{n(2n^2+4)}{6}\, OG' : n^3 = \frac{n(2n^2+4)}{6n^3} \times \frac{3n}{n^2+2}\,\delta$$

ou
$$OG = \frac{\delta}{n}.$$

C. Q. F. D.

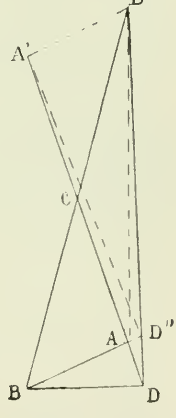
Conséquence. — Si le tétraèdre ABCD est formé d'une substance homogène, la conséquence *(d)* donnée pour le cas du triangle s'applique au tétraèdre, c'est-à-dire que *le point* O *est le* 𝔊𝔊 *du tétraèdre homogène* ABCD.

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DE LA FORMULE

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} = \frac{a+b}{a-b}. \qquad (*)$$

Par M. **E. Braud.**

Soit le triangle ABC; a, b, c désignant les longueurs des côtés opposés respectivement aux angles A, B, C.



Portons, dans la direction des côtés,

$$CD = CD' = CB,$$
$$CA' = CA.$$

La droite A'D' sera parallèle à BA ; l'angle BDD' étant droit, l'angle CBD vaudra $\frac{A+B}{2}$ et l'angle ABD aura pour valeur $\frac{A-B}{2}$.

De plus, on a $A'D = a + b$ et $AD = a - b$.

Les triangles A'D'A et A'D'D'', ayant la même base A'D' et les sommets situés sur la parallèle BAD'', sont équivalents; il en résulte que les triangles A'D''D et D'AD sont aussi équivalents. Comme ces triangles ont l'angle ADD'' commun, ils sont entre eux comme les produits des côtés

---

(*) Voyez le *Journal*, p. 15 et 64.

Nous donnerons, dans le prochain numéro, une note consacrée à l'établissement de certaines formules de la trigonométrie par la voie géométrique. Ce rapprochement entre la trigonométrie et la géométrie n'a rien qui doive surprendre; toute formule trigonométrique étant l'expression d'une vérité géométrique.

qui comprennent cet angle. L'équivalence de ces triangles donne
$$A'D \times DD'' = AD \times DD'.$$
Or, DD'' et DD' sont proportionnelles à $\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}$,

donc
$$(a+b)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = (a-b)\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}.$$

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Aubry.**

(*Suite*, voir page 105.)

Les Indiens, déjà au temps d'Aryabhata, employaient les sinus au lieu de cordes : du moins voit-on dans cet auteur la première table de sinus connue. Elle donne les sinus des angles de 3° 45′ en 3° 45′ avec les différences. Le sinus de 3° 45′ est facile à trouver; pour les autres, il emploie la formule donnant le sinus de la somme de deux arcs (*).

Les Arabes perfectionnèrent et simplifièrent la trigonométrie en beaucoup de points, surtout en créant des procédés plus généraux que ceux employés jusqu'alors. Albategni (milieu du IXe siècle) substitue les sinus (**) aux cordes, et donne diverses tables astronomiques; Ebn-Jounis (fin du Xe siècle) trouve la formule remplaçant un produit de sinus par une

---

(*) Cette formule a probablement été d'abord démontrée ainsi : Le double de la surface du triangle ABC (*fig. 11*) peut s'écrire des deux manières suivantes : $bc \sin A$, ou $a'h + a''h$, h désignant la hauteur AD, d'où
$$\sin(A_1 + A_2) = \sin A$$
$$= \frac{a'}{c}\cdot\frac{h}{b} + \frac{a''}{b}\cdot\frac{h}{c} = \sin A_1 \sin C + \sin A_2 \sin B$$
$$= \sin A_1 \cos A_2 + \sin A_2 \cos A_1.$$

Fig. 11.

Cette démonstration a été donnée par Cauchy (*Rés. anal.*) et retrouvée, plusieurs fois, depuis.

(**) Dans la première édition de son *Histoire des Mathématiques*, Montucla donne, comme origine du mot sinus, l'expression *semisses inscriptarum* par laquelle on désignait les demi-cordes et qu'on écrivait *s. ins*, d'où par corruption serait venu sinus. Mais il est hors de doute que ce mot n'est autre chose que la traduction latine d'un mot arabe.

somme d'autres sinus, imagine les tangentes et les sécantes, et donne des tables de minute en minute jusqu'au quart de la circonférence; Aboul-Djoud (commencement du IXe siècle) prélude à la découverte de la théorie des *sections angulaires* (note) en donnant l'équation qui lie les côtés de l'hexagone et de l'ennéagone inscrits (*); Geber (milieu du XIe siècle) trouve la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique; Ouloug-Beg (milieu du XVe siècle) donne de nouvelles méthodes pour la construction des tables de sinus de degré en degré: l'une est un ingénieux perfectionnement de celle de Ptolémée (**); par la deuxième, il déduit directement la valeur de sin 1° de celle de sin 3°, en résolvant une équation du troisième degré (***).

En Europe, la trigonométrie fut d'abord cultivée et la pratique des calculs trigonométriques perfectionnée par Purbach

---

(*) Soit l'arc AB (*fig. 12*) répété deux fois en BC et CD : le théorème de Ptolémée donne

$$\overline{AD}^3 = 3.\overline{AO}^2.AD - \overline{AO}^2.CD.$$

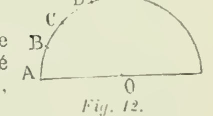


Fig. 12.

Ceci n'atténue pas le mérite de la découverte de Viète : les travaux des Arabes ont de tout temps été peu connus directement, et ceux que nous citons, entre autres, retrouvés tout récemment.

(**) Par le théorème de Ptolémée, on a facilement les sinus des angles de 3°, puis de $a = 45'$, $b = 56' 15''$, $c = 1°7'30''$. Or la différence des sinus de 1° et de b est plus petite que le tiers de celle des sinus de b et de a; on peut donc écrire

$$\sin 1° < \frac{4}{3} \sin b - \frac{1}{3} \sin a.$$

On a de même $\quad \sin 1° - \sin b > \frac{1}{3}(\sin c - \sin b),$

d'où $\quad \sin 1° > \frac{2}{3} \sin b + \frac{1}{3} \sin a.$

On a ainsi deux limites très rapprochées de sin 1°.

(***) La relation d'Aboul-Djoud donne

$$(\alpha) \qquad \sin 1° = \frac{\sin 3°}{3} + \frac{4 \sin^3 1°}{3}.$$

Il résout cette équation par fausse position, en posant comme première approximation $\sin 1° = \frac{\sin 3°}{3}$, remplaçant dans (α) sin 1° par cette valeur, ce qui donne pour le premier membre une deuxième approximation dont il ne garde que les minutes du rayon; il remplace cette valeur, ce qui donne une troisième approximation, dont il conserve les minutes et les secondes. Et ainsi de suite.

et Regiomontanus. On leur doit l'extension des tables à toutes les minutes du quart de cercle et la première idée des fractions décimales : au lieu de la division de Ptolémée, Purbach divise le rayon en 600 000 parties et Regiomontanus en 1 000 000. Leur méthode d'interpolation des sinus des angles de minute en minute consistait en un tâtonnement fondé sur le lemme de Ptolémée rapporté plus haut.

Viète a fait faire de grands progrès, à la science dont l'histoire nous occupe, par ses théorèmes de trigonométrie sphérique, qu'il a beaucoup simplifiée (*Var. de rebus math.*, Tours, 1593). Il a aussi donné (*Canon mathemaicus*, Paris, 1579) une savante méthode de calcul du sinus de 1′ (*), pour laquelle il avait imaginé sa fameuse théorie des *sections angulaires* (voir la note à la fin de cet article), et commencé ses recherches sur la théorie et la résolution des équations.

Rheticus entreprit la construction d'une table des lignes trigonométriques des arcs de dix en dix secondes (**), travail terminé par Pitiscus, et publié en 1596 sous le nom d'*Opus palatinum*. Il suppose le rayon divisé en 10 000 000 000 000 000 parties, ce qui, aujourd'hui, s'appellerait *calculer avec quinze décimales*. C'est de l'*Opus palatinum* qu'ont été tirées les tables trigonométriques en usage encore aujourd'hui.

Au sujet du calcul des tables, il n'y a plus guère à citer que les méthodes modernes fondées sur l'emploi des séries ou des différences et appliquées aux tables centésimales, dites *du cadastre*, exécutées, en 1795, par ordre de la Convention, et dont la publication serait de la plus haute utilité si la division centésimale venait à être adoptée (***). Si on comprend que l'astronomie — en raison des observations consignées

---

(*) Par la quintisection de l'angle de 18°, il trouve le sinus de 3° 36′; par deux trisections et une bissection de l'angle de 60°, il arrive à celui de 3° 20′; d'où les sinus de 16′ et par suite ceux de 8′, 4′, 2′ et 1′.

(**) Par des bissections de l'angle 3° répétées un grand nombre de fois, il arrive à l'arc dont le cosinus est 999 999 999 999 999. Il remonte ensuite par des additions d'arcs convenables aux arcs dont il désire les cosinus. Nous donnons ces renseignements surtout pour montrer à quels immenses calculs ont dû se livrer les auteurs des premières tables trigonométriques.

(***) L'idée de la division centésimale est due à Briggs, qui avait d'abord calculé des tables de logarithmes trigonométriques dans cette division.

en numération sexagésimale depuis de si nombreux siècles, — ne puisse abandonner cette division de la circonférence, on ne s'explique guère que la navigation et la géodésie, par exemple, tardent tant à opérer ce changement, qui certainement, tôt ou tard, se fera.

On doit à Neper deux perfectionnements au point de vue de la pratique du calcul : l'application des logarithmes aux tables ; et les formules qui portent son nom. Ces deux découvertes se trouvent dans son célèbre *Mirifici canonum descriptio* (Edimburgh, 1614).

Jusque-là, la trigonométrie était appliquée exclusivement aux besoins de l'astronomie; on commença alors à l'envisager pour elle-même. La quadrature des triangles sphériques a été donnée par Albert Girard (*Inv. nouv. en alg.*, Amsterdam, 1629), et sa formule a été démontrée par Cavalieri. On connaît les théorèmes de Lexell, de Gudermann, etc., constituant le commencement de ce qu'on a appelé la *géométrie de la sphère* et dans laquelle il reste tant à découvrir.

La découverte des séries trigonométriques, commencée par Newton, et continuée par James Gregory, Leibniz, les Bernoulli, Euler, a fait de la trigonométrie analytique une des parties les plus riches de l'analyse. La trigonométrie imaginaire, due aux travaux de Moivre et de Lambert, a ouvert des voies nouvelles; plusieurs d'entre elles touchent aux points les plus élevés de la science et sont loin d'être entièrement explorées.

L'ouvrage le plus complet sur la trigonométrie est le célèbre Traité de Cagnoli, où l'on voit, outre l'exposition de la science pure, les applications principales à l'astronomie, à la navigation, à la géodésie, etc. Dans un cadre plus élémentaire, on a de nombreux ouvrages excellents, parmi lesquels nous mentionnerons celui de J.-A. Serret. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

394. — *Ayant posé* :

$$S_n = x^2 + (x + r)^2 + (x + 2r)^2 + \ldots + [x + (n - 1)r]^2,$$

vérifier les identités suivantes qui décomposent algébriquement S_n *en une somme de quatre carrés au plus :*

$S_6 = (2x + 3r)^2 + (x + 6r)^2 + (x + 3r)^2 + r^2.$
$S_7 = (2x + 4r)^2 + (x + r)^2 + (x + 5r)^2 + (x + 7r)^2.$
$S_8 = (2x + 11r)^2 + (2x + 3r)^2 + (3r)^2 + r^2.$
$S_{10} = (3x + 14r)^2 + (x + 3r)^2 + (8r)^2 + (4r)^2.$
$S_{11} = (3x + 16r)^2 + (x + 5r)^2 + (x + 2r)^2 + (10r)^2.$
$S_{12} = (3x + 15r)^2 + (x + 16r)^2 + (x + 5r)^2 + x^2.$
$S_{13} = (3x + 24r)^2 + (2x + 3r)^2 + (8r)^2 + r^2.$
$S_{14} = (3x + 12r)^2 + (2x + 25r)^2 + (x + 5r)^2 + (5r)^2.$
$S_{15} = (3x + 31r)^2 + (2x + 2r)^2 + (x + 7r)^2 + (x + r)^2.$
$S_{16} = (4x + 30r)^2 + (18r)^2 + (4r)^2.$
$S_{17} = (4x + 34r)^2 + x^2 + (18r)^2 + (4r)^2.$
$S_{18} = (3x + 41r)^2 + (3x + 10r)^2 + (2r)^2.$
$S_{19} = (3x + 44r)^2 + (3x + 13r)^2 + x^2 + (2r)^2.$
$S_{20} = (4x + 47r)^2 + (2x + r)^2 + (16r)^2 + (2r)^2.$
$S_{21} = (4x + 49r)^2 + (2x + r)^2 + (x + 12r)^2 + (18r)^2.$
$S_{22} = (3x + 49r)^2 + (3x + 30r)^2 + (2x - 3r)^2 + r^2.$
$S_{23} = (3x + 53r)^2 + (3x + 9r)^2 + (2x + 28r)^2 + (x + 11r)^2$
$S_{24} = (4x + 65r)^2 + (2x + 7r)^2 + (2x + r)^2 + (7r)^2.$
$S_{25} = (5x + 60r)^2 + (30r)^2 + (20r)^2.$
$S_{26} = (5x + 65r)^2 + x^2 + (30r)^2 + (20r)^2.$
$S_{27} = (5x + 63r)^2 + (x + 30r)^2 + (x + 6r)^2 + (36r)^2.$
$S_{28} = (4x + 79r)^2 + (2x + 26r)^2 + (2x + 3r)^2 + (2x + 2r)^2$
$S_{29} = (5x + 80r)^2 + (2x + 3r)^2 + (27r)^2 + (24r)^2.$
$S_{30} = (5x + 69r)^2 + (2x + 53r)^2 + (x - 16r)^2 + (27r)^2.$
$S_{31} = (5x + 55r)^2 + (2x + 74r)^2 + (x + 15r)^2 + (x + 27r)^2.$
$S_{32} = (4x + 98r)^2 + (4x + 26r)^2 + (10r)^2 + (6r)^2.$
$S_{33} = (5x + 96r)^2 + (2x + 12r)^2 + (2x + 12r)^2 + (44r)^2.$
$S_{34} = (5x + 105r)^2 + (3x + 12r)^2 + (36r)^2 + (8r)^2.$
$S_{35} = (5x + 104r)^2 + (3x + 23r)^2 + (x + 6r)^2 + (48r)^2.$
$S_{36} = (6x + 105r)^2 + (62r)^2 + (4r)^2 + (5r)^2.$
$S_{37} = (6x + 109r)^2 + (x + 12r)^2 + (55r)^2 + (34r)^2.$

395. — *Sommer la suite :*

$$S = 1 + 1 + 2 + 4 + 7 + \dots + u_n.$$

$(u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}).$

On trouve $$S = \frac{u_{n+2} + u_n - 1}{2}.$$

396. — *On peut toujours trouver* n^2 *entiers positifs, en progression arithmétique, et tels que la somme de leurs carrés soit un carré.* (Voir *J. M. E.* Ex. divers, nos 302 à 308, 369 à 372.)

On a à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$6n^2x^2 + 6n^2(n^2 - 1)rx + n^2(n^2 - 1)(2n^2 - 1)r^2 = 6k^2,$$

où x désigne le plus petit des entiers considérés, r la raison et k^2 la somme des carrés des termes.

Cette équation se ramène à

$$12k^2 - n^2(n^4 - 1)r^2 = 12y^2,$$

ou bien
$$k^2 - y^2 = \frac{n^2(n^4 - 1)r^2}{12}$$

qui est toujours possible ; alors

$$x = \frac{y}{n} - \frac{(n^2 - 1)r}{2}.$$

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(CONCOURS DE 1895)

Solution par M. H. Harivel, professeur de mathématiques (*).

PREMIÈRE PARTIE

Trouver les côtés d'un triangle rectangle, connaissant la différence α *des côtés de l'angle droit et la différence* β *de l'hypoténuse et de la hauteur. — Discuter.*

Soient x, y les longueurs des côtés de l'angle droit ; z, l'hypoténuse ; v, la hauteur.

On a

(1) $$x - y = \alpha,$$
(2) $$x^2 + y^2 = z^2,$$
(3) $$z - v = \beta,$$
(4) $$xy = zv.$$

Élevons (1) au carré ; en tenant compte des équations (2) et (4), on a

$$z^2 - 2zv = \alpha^2.$$

De (3), on tire $v = z - \beta$;

(*) Nous avons reçu une solution analogue de M. l'abbé Reboul, professeur au collège de Belley.

On aura donc

$$z^2 - 2z(z - \beta) = \alpha^2,$$

ou (5) $$z^2 - 2\beta z + \alpha^2 = 0.$$

Cette équation a ses racines réelles, si l'on suppose

$$\beta^2 - \alpha^2 \geqslant 0;$$

c'est-à-dire si β est supérieur ou égal à α.

Mais, *a priori*, l'hypoténuse doit être plus grande que β, et comme $f(\beta) = -\beta^2 + \alpha^2$, quantité négative, la plus grande racine peut seule convenir à la question. Nous avons donc

$$z = \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

Pour achever de déterminer le triangle, calculons v.

Nous avons vu que $z^2 - 2zv = \alpha^2$;

d'ailleurs $$z = v + \beta,$$

donc $$(v + \beta)^2 - 2(v + \beta)v = \alpha^2,$$

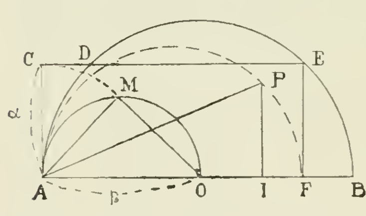
d'où $$v = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$

β étant $> \alpha$, la seule condition est

$$2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \leqslant \beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2},$$

ou $$\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \leqslant \beta,$$

condition toujours vérifiée, puisque β est positif



En résumé,

une seule solution, si $\beta > \alpha$;

pas de solution, si $\beta < \alpha$.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE. — Prenons $AB = 2\beta$, $AC = \alpha$; AF est la plus grande racine de l'équation (5); d'ailleurs, $OM = \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}$. Décrivons, sur AF comme diamètre, une circonférence; si PI = OM, le triangle APF est le triangle cherché.

DEUXIÈME PARTIE

On donne deux circonférences concentriques et un point P *sur l'une d'elles. On mène. par le point* P. *dans les deux circonférences. les cordes rectangulaires* PA *et* BPC. *Ces cordes tournent autour du point fixe* P.

1° Démontrer que $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ *est une somme constante.*

2° Que la somme des carrés des côtés du triangle ABC *est aussi constante.*

3° Démontrer que le centre de gravité du triangle ABC *est fixe.*

4° Trouver les lieux décrits par les milieux des côtés du triangle ABC.

1° Soient r et R les rayons des deux circonférences; élevons IO perpendiculaire sur PC et traçons OP.

Nous avons $$\overline{OI}^2 + \overline{PI}^2 = r^2,$$

$$\frac{\overline{PA}^2}{4} + \left(\frac{PC - CO}{2}\right)^2 = r^2.$$

$$\frac{\overline{PA}^2}{4} + \frac{\overline{PC}^2}{4} + \frac{\overline{PB}^2}{4} - \frac{PC.PB}{2} = r^2.$$

Mais $$PC \times PB = PE \times PF = R^2 - r^2,$$

donc $$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 4\left(r^2 + \frac{R^2 - r^2}{2}\right) = 2(R^2 + r^2).$$

2° Pour prouver que *la somme des carrés des côtés du triangle* ABC *est constante*, observons que

$$\overline{AB}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2.$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2.$$
$$\overline{BC}^2 = (BP + PC)^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + 2(R^2 - r^2);$$

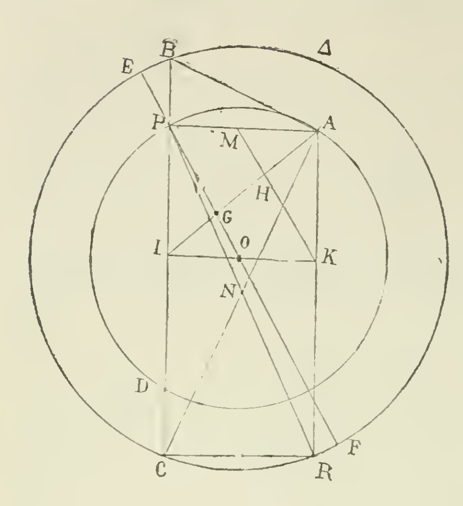
d'où

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2) + 2(R^2 - r^2)$$
$$= 4(R^2 + r^2) + 2(R^2 - r^2)$$
$$= 6R^2 + 2r^2 = \text{constante}.$$

3° *Le centre de gravité est fixe.*

Construisons le rectangle ayant pour côtés PA et PI, joignons KM, M milieu de AP, H point de rencontre de KM avec AI et G point de rencontre de AI avec PO. Le point O étant le milieu de IK et le point M le milieu de AP, les triangles semblables donnent successivement IG = GH = AH.

G étant au tiers de AI, ce point est le centre de gravité du triangle ABC.



Or, $\frac{OG}{GP} = \frac{IO}{AP} = \frac{1}{2}$, donc le point G, situé tiers de OP à partir du point O, est un point fixe.

4° *Lieu des milieux des côtés du triangle* ABC.

Le lieu du milieu I du côté BC est évident, car l'angle PIO étant droit, ce lieu est la circonférence décrite sur OP comme diamètre.

Pour trouver le lieu du milieu de AC, nous construisons le rectangle APCR dont le sommet R, pour des raisons évidentes, appartient à la circonférence Δ : N milieu de AC est aussi le milieu de la deuxième diagonale PR du rectangle.

Ainsi, tout revient à trouver le lieu du milieu des droites, issues d'un point P, et limitées à cette circonférence.

Ce lieu est la figure homothétique à la circonférence Δ, c'est-à-dire une circonférence ayant un rayon moitié du rayon de Δ et dont le centre est sur PO.

C'est aussi le lieu du milieu du côté AB.

ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE

(Concours de 1895.)

Épure.

Une sphère de centre O, de rayon égal à 9^{cm} est tangente au plan horizontal. Soient AB, un diamètre horizontal de la sphère, C, le milieu du rayon OA, D, le point le plus élevé de la sphère. Par les trois points B, C, D, mener trois parallèles faisant des angles de 45° avec le plan horizontal et perpendiculaires à la direction AB. Trouver la projection horizontale de l'intersection de la sphère et de la surface prismatique indéfinie ayant ces trois parallèles pour arêtes latérales.

Représenter la portion (supposée opaque) de la sphère comprise dans la surface prismatique. Construire les sommets des ellipses formant la projection de l'intersection, et écrire les cotes des points correspondants.

Mener les tangentes à ces ellipses en leurs points situés sur les projections des arètes.

Construire les projections des points de l'intersection déterminés par le plan horizontal de cote 16.

Mener à l'intersection les tangentes parallèles aux côtés du triangle BCD et écrire les cotes des points de contact.

ÉCOLE NAVALE

(Concours de 1895.)

Composition de géométrie et de géométrie analytique.

I. Exposer succinctement le principe de la méthode des isopérimètres pour le calcul de π.

II. Dans un triangle sphérique ABC, si la somme des deux angles B et C est égale à deux droits, la somme des deux côtés AB et AC est égale à une demi-circonférence. En conclure que si on se donne A et la somme $B + C = 2$ dr., le côté BC passe par un point fixe.

III. Soient OX et OY, deux axes rectangulaires; A, B deux points sur ces axes; M, N les milieux de OA et de BA. On considère :

1° L'hyperbole équilatère de centre M tangente en O à l'axe des Y.

2° L'hyperbole équilatère de centre N tangente en B à l'axe des Y.

Construire les asymptotes de ces hyperboles.

Elles se coupent deux à deux en quatre points qui sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle AMN.

Les points de rencontre de ces hyperboles, autres que A, sont à l'intersection de la circonférence circonscrite au triangle OAB et de la parallèle à l'axe des X, menée par N.

Lieu des points de rencontre de ces hyperboles;

Lieu des points de rencontre des asymptotes lorsque A et B se déplaçant respectivement sur l'axe des X et des Y, la longueur AB reste constante.

On posera $A = 2a$, $OB = 2b$, $AB = 2l$.

Épure.

Une sphère de rayon $R = 50^{mm}$ est tangente au plan horizontal de coté O, au point O. D'un point A, situé dans ce plan, à une distance $OA = 100^{mm}$, on mène successivement :

1° Les deux tangentes à la sphère faisant avec la verticale un angle de 40°;

2° Les deux tangentes à la sphère faisant avec l'horizontale OA un angle de 23°.

Ces quatre tangentes étant considérées comme les arêtes d'une pyramide indéfinie, de sommet A, tracer la projection du volume commun à la sphère et à cette pyramide.

Calcul logarithmique.

Calculer l'angle x compris entre o et π qui vérifie l'équation

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^3 359^\circ\,22'\,13'',7\ \mathrm{tg}\ 2143^\circ\,49'\,35'',8}{(0,365\,247)^2\cos^3 91^\circ\,15'\,32'',6}.$$

$$0 < x < 180^\circ.$$

Composition d'algèbre.

I. — Convergence des séries dont les termes sont alternativement positifs ou négatifs.

II. — On donne une demi-circonférence ACB, de rayon OC = R. On demande de déterminer sur les tangentes aux extrémités du diamètre deux points D et E ($AD = x$, $BC = y$) tels que DE soit tangent à la demi-circonférence; et que la surface de la sphère engendrée par la demi-circonférence FDEG, circonscrite au trapèze ADEB, en tournant autour de AB soit égale à m fois la surface totale du tronc de cône engendré par le trapèze.

III. — Calculer à 0,001 près, les racines de l'équation

$$x^4 + \pi x^2 - 7,6 = 0.$$

INSTITUT NATIONAL AGRONOMIQUE

(Concours de 1895.)

Mathématiques.

I. — On veut rembourser un capital C au moyen d'une annuité a payable à la fin de chaque année; on demande quel est l'amortissement pendant la $p^{\text{ème}}$ année, c'est-à-dire de combien la dette a-t-elle diminué de la fin de la $(p-1)^{\text{ème}}$ année à la fin de la $p^{\text{ème}}$? Discuter la formule trouvée.

Application :
$C =$ 100.000 francs.
$a =$ 10.000 francs.
$r = 0,05$ (taux pour 1 franc).
$p = 8$.

II. — Étant donné un rectangle ABCD, à quelle distance du côté AD doit-on mener une parallèle EF à ce côté, pour que le rapport de la diagonale AF, du rectangle AEFD ainsi formé, à EB soit égal à un nombre donné m :

$$\frac{AF}{EB} = m?$$

Discussion (*).

(*) On voit que, d'après l'énoncé même, le point F est à l'intersection de CD avec la circonférence décrite sur MM' comme diamètre; M, M' étant les points qui partagent AC dans le rapport donné m. Cette solution géométrique, évidente, permettait de retrouver très simplement, par des considérations géométriques, les résultats fournis par la discussion demandée.

BACCALAURÉATS

Académie de Grenoble (*).

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Dans un triangle rectangle BAC, on donne l'hypoténuse a et la somme l de la hauteur abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse et de l'un des segments qu'elle détermine sur cette hypoténuse.
Déterminer cette hauteur algébriquement ou géométriquement. Discussion, en supposant a fixe et l variable.

II. — Fraction ordinaire génératrice de 0,37432432...

2° *Questions au choix :* (*a*) Recherche du p. g. c. d. de deux nombres par la méthode des divisions successives.

(*b*) Tout nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre.

(*c*) Réduction d'une fraction ordinaire à sa plus simple expression.

3° *Problème.* — Les trois faces d'un angle trièdre OABC sont des angles droits. On prend sur deux des arêtes deux longueurs égales données $OA = OB = a$, et sur la troisième une longueur variable $OC = x$. On demande de déterminer x par la condition que le volume du tétraèdre OABC soit égal au produit de sa surface totale par une longueur donnée positive $\frac{m}{3}$. — Maximum de m.

Académie de Lille.

Questions au choix : 1° Étudier la fonction $y = \operatorname{coséc} x$. On traitera seulement les questions suivantes : définition, variations. Condition pour que l'équation $\operatorname{coséc} x = \alpha$ admette des solutions ; formule pour passer de l'une d'elles à toutes les autres. — Formes diverses de la relation qui lie les deux arcs dont les cosécantes sont égales et de même signe ou égales et de signes contraires.

2° Montrer que le système

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B, \\ b &= c \cos A + a \cos C, \\ c &= a \cos B + b \cos A, \end{aligned}$$

entraîne le suivant

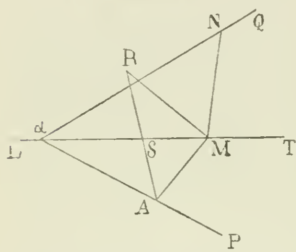
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \qquad A + B + C = 180°.$$

(*) Je rappelle ici, à l'aimable attention des correspondants du Journal, la note que j'ai insérée dans le n° d'avril (p. 86), note dans laquelle j'appelle leur attention sur une question donnée aux examens du baccalauréat ès sciences, à Montpellier. La question posée a-t-elle, contrairement à mon opinion, une solution élémentaire ?
Quelle est cette solution ? *G. L.*

On ne démontrera pas la réciproque, mais on mettra en évidence les conditions restrictives que doivent vérifier les éléments a, b, c, A, B, C.

3° Un angle étant donné par sa tangente seulement, on demande d'établir *a priori*, sans mise en équation, combien la tangente, le sinus et le cosinus de sa moitié ont respectivement de valeurs distinctes. On étudiera ensuite si ces valeurs sont réelles et on indiquera les relations qui existent entre elles.

Problème obligatoire. — On donne trois droites concourantes LT, αP, αQ et un point A pris sur αP; c'est-à-dire que l'on doit considérer la longueur αA et les angles $\widehat{P\alpha T}$, $\widehat{Q\alpha T}$, comme donnés. On demande de trouver sur LT un point M tel qu'en menant MN perpendiculairement à LT et limitée à αQ, puis MR perpendiculaire à AM et égale à MN, et traçant AR qui coupe LT en un certain point S, on ait :



$$\overline{\alpha M} \times \overline{AS} = \overline{\alpha A} \times \overline{SM}.$$

On pourra donner une solution analytique ou encore déduire de la considération des changements de plans une solution géométrique.

QUESTION 546 (*)

Solution par M. Georges Rodriguez, étudiant à Medellin (Colombie).

Résoudre

$$(x + a)(x + b)[2x^3 + (a + b)(a + b - x)^2] = 2(a + b)x[a^2(x + a) + b^2(x + b)].$$

(Sollerstinsky.)

On peut mettre l'équation sous la forme

$$[x^2 + (a + b)x + ab][2x^3 + (a + b)x^2 - 2(a + b)^2x + (a + b)^3] = 2(a + b)x[(a^2 + b^2)x + (a^3 + b^3)],$$

ou

$$2x^5 + 2x^4(a + b) + x^4(a + b) + x^3(a + b)^2 - 2x^3(a + b)^2 - 2x^2(a + b)^3 + 2abx^3 + 2abx^2(a + b) - 2x^2(a + b)(a^2 + b^2) - 2x(a + b)^2(a^2 + b^2) + x^2(a + b)^3 + x(a + b)^4 - abx^2(a + b) + ab(a + b)^3 = 0,$$

ou

$$(x + a + b)[2x^4 + x^3(a + b) - 2x^2(a + b)^2 + 2abx^2 - 2x(a + b)(a^2 + b^2) + x(a + b)^3 - abx(a + b) + ab(a + b)^2] = 0.$$

(*) Nous avons reçu, trop tardivement pour la signaler, une solution de la question 562 (Voyez *Journal*, p. 43) de M. José de la C. Arbeláez, à Marimilla (Colombie).

On a donc une première racine x' égale à $-(a+b)$.

Reprenons l'équation

$$2x^4 + x^3(a+b) - 2x^2(a+b)^2 + 2abx^2 - 2x(a+b)(a^2+b^2)$$
$$+ x(a+b)^3 + abx(a+b) + ab(a+b)^2 =$$

ou

$$2x^4 + 2x^3(a+b) - x^3(a+b) - x^2(a+b)^2 - x^2(a+b)^2$$
$$- x(a+b)^3 + 2abx^2 + 2abx(a+b) + abx(a+b)$$
$$+ ab(a+b)^2 = 0,$$

ou

$$(x+a+b)[2x^3 - x^2(a+b) - x(a+b)^2$$
$$+ 2abx + ab(a+b)] = 0.$$

On a une nouvelle racine égale à la précédente. Enfin

$$2x^3 - x^2(a+b) - x(a+b)^2 + 2abx + ab(a+b) = 0,$$

donne

$$2x^3 - 2x^2(a+b) + 2abx + (a+b)x^2 - (a+b)^2x$$
$$+ ab(a+b) = 0,$$

ou $$[x^2 - (a+b)x + ab](2x+a+b) = 0,$$
$$(x-a)(x-b)(2x+a+b) = 0.$$

L'équation, en résumé, a pour racines : 1° une racine double égale à $-(a+b)$; 2° trois racines simples a, b, $-\frac{a+b}{2}$.

QUESTIONS PROPOSÉES

650. — 1° Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées, par le centre de gravité, aux trois médianes coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite;

2° Si les perpendiculaires élevées par le centre de gravité aux médianes BM′, CM″ coupent respectivement AC, AB en F, F′; la droite FF′ coupe BC en un point A″, situé sur une droite avec les points analogues B″, C″. *(A. Davidoglou.)*

651. — Dans un cercle Γ, on considère un diamètre fixe AB et une corde mobile $\alpha\beta$ telle que, dans chaque position, on ait, en projetant β en β_1 sur AB : $\alpha\beta = \beta\beta_1$. La bissectrice de $\widehat{\alpha A\beta}$ coupe $B\beta$ en B_1; la parallèle à AB_1, menée par B, coupe $A\beta$ en A_1.

La droite $\mu\mu_1$, qui passe par les milieux μ, μ_1 des segments AB_1, A_1B, conserve sur AB une projection orthogonale constante. (*A. Davidoglou.*)

652. — On donne une circonférence de cercle et un point dans son intérieur. De ce point, on mène deux droites conjuguées par rapport au cercle. Démontrer que, quelles que soient ces deux droites, la somme des inverses des carrés des cordes que le cercle intercepte sur elles est constante.

(*Mannheim.*)

653. — On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur Ox. Soit ω un point quelconque sur Oy et soit O' le symétrique de O. par rapport à ω. Du point ω comme centre, avec OA pour rayon, on décrit une conférence Δ qui rencontre AO' aux points E, E'. On trace OE. OE', qui coupent ω en F et F'. La droite FF' passe par le symétrique de A par rapport à O. (*A. Davidoglou.*)

654. — Les bissectrices des angles intérieurs d'un quadrilatère ABCD forment un autre quadrilatère MNPQ. Construire ABCD connaissant MNPQ. (*A. Davidoglou.*)

655. — On considère un triangle ABC et le cercle Δ. circonscrit à ABC.

Les parallèles à la tangente en A au cercle Δ, menées par les points B, C, rencontrent les côtés AC, AB, en des points A', A''. La droi e A'A'' coupe BC en α.

Démontrer que $A\alpha$, et les droites analogues $B\beta$, $C\gamma$ passent par un même point. *G. L.*

ERRATUM

Page 142. — *Au lieu de* « relation (3) », *il faut comprendre* la relation qu'il s'agissait de démontrer.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20. PARIS. — 12946-6-95.

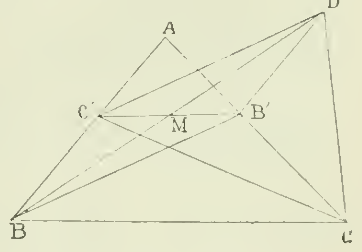
SUR UN THÉORÈME INDÉPENDANT

DU POSTULATUM D'EUCLIDE

Par M. G. **Tarry**.

Nous allons démontrer qu'un triangle est isoscèle s'il a deux bissectrices intérieures égales, sans nous appuyer sur le postulatum d'Euclide.

Lemme. — *Dans un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent mutuellement en deux parties égales, deux côtés opposés ne peuvent se rencontrer.*



On démontre bien facilement que les perpendiculaires menées par le point d'intersection des diagonales à deux côtés opposés se confondent en une seule droite. D'où l'on conclut que deux côtés opposés, nécessairement perpendiculaires à une même droite, ne peuvent se rencontrer.

Théorème. — *Cela démontré, je dis qu'un triangle* ABC, *qui a deux bissectrices intérieures égales,* BB′ *et* CC′, *est isoscèle.*

Soit M le milieu de la droite C′B′. Prolongeons la droite BM d'une quantité égale, MD = BM. La droite B′D ne peut être à l'intérieur de l'angle C′B′A, autrement les côtés opposés B′C et B′D du quadrilatère BC′DB′ se rencontreraient nécessairement, ce qui est impossible.

Il résulte de là que le point B′ se trouve à l'intérieur du triangle C′CD.

Supposons maintenant que les côtés AB et AC ne soient pas égaux, que AB soit plus petit que AC.

L'angle B sera plus grand que l'angle C, l'angle ABB′, moitié de l'angle B, ou son égal l'angle C′DB′, sera plus grand que l'angle C′CB′, moitié de l'angle C.

D'autre part, si l'on compare les deux triangles BCB' et BCC', qui ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, on voit que le côté BC', ou son égal B'D, opposé à l'angle $\frac{C}{2}$, est plus petit que le côté CB' opposé à l'angle $\frac{B}{2}$. Par conséquent, dans le triangle B'DC, l'angle B'DC, opposé au côté CB', est plus grand que l'angle B'CD, opposé au côté B'D.

Les angles C'DB' et B'DC étant respectivement plus grands que les angles C'CB' et B'CD, et le point B' étant à l'intérieur du triangle C'CD, l'angle C'DC est plus grand que l'angle C'CD; par suite, le côté CC' est plus grand que le côté C'D, plus grand, par conséquent, que son égal BB'.

Les deux bissectrices BB' et CC' ne seraient donc pas égales, contrairement à l'hypothèse.

Ce qui démontre, sans le secours du postulatum d'Euclide, la célèbre réciproque du théorème :

Un triangle isoscèle a deux bissectrices égales.

DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES DE QUELQUES FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE

Par M. **Brand.**

1. $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$

On observe que la formule peut s'écrire successivement

$$\sin (a + b) = \cos a \cos b . (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b)$$
$$\operatorname{séc} a . \sin (a + b) = \cos b . (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b).$$

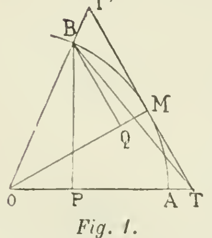


Fig. 1.

Soient, dans une circonférence de rayon 1, l'arc AM égal à a et l'arc MB égal à b *(fig. 1)*. Le triangle OBT est égal à la différence des triangles OTT' et BTT'; dès lors, on a

$$OT \times BP = TT' \times OM - TT' \times QM$$

ou

$$OT \times BP = TT' \times OQ$$

c'est-à-dire, $\operatorname{séc} a \times \sin (a + b) = (\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \cos b$, etc ..

2. *sin* (a — b) = *sin* a *cos* b — *sin* b *cos* a.

On écrira, de même, successivement

$$\sin(a-b)=\cos a\cos b.(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b)$$

$$\sec b.\sin(a-b)=\cos a.(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b).$$

Soient (*fig.* 2) $\overline{MA}=a$ et $\overline{MB}=b$.

Le triangle OAT′ est égal à la différence des triangles OTT′ et ATT′; dès lors, on a

$$OT'\times AQ=TT'\times OM-TT'\times PM=TT'\times OP$$

ou

$$\sec b\times\sin(a-b)=(\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b).\cos a, \text{etc...}$$

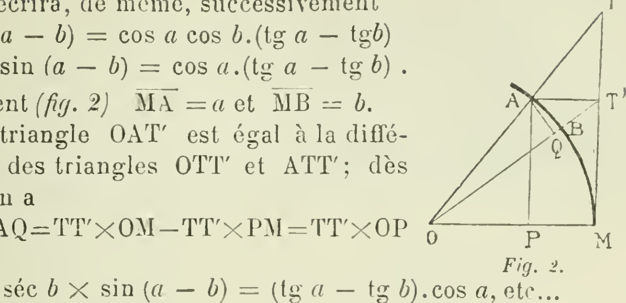


Fig. 2.

3. *sin* 2a = 2 *sin* a.*cos* a.

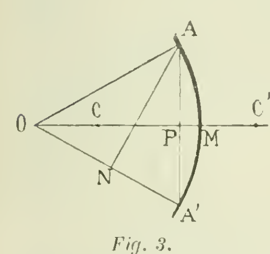


Fig. 3.

Soient (*fig.* 3) $\overline{MA}=\overline{MA'}=a$

L'aire du triangle OAA′ prend deux formes différentes, suivant que l'on considère la base OA′ ou la base AA′. On aura ainsi

$$OA'\times AN=AA'\times OP$$

ou $$OA'\times AN=2AP\times OP$$

ou enfin $$\sin 2a=2\sin a\cos a.$$

4. *cos* 2a = *cos*² a — *sin*² a.

Il faut démontrer que

$$1\times\cos 2a=(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a).$$

Or (*fig.* 3), les points A, N et N′ sont sur une même circonférence qui coupe le rayon OM en C et son prolongement en C′.

Il est facile de voir que l'on a successivement

$$OA'\times ON=OC'\times OC,$$

ou $$OA'\times ON=(OP+PC')(OP-PC),$$

c'est-à-dire $$\cos 2a=(\cos a+\sin a)(\cos a-\sin a).$$

5. *sin* (a + b) + *sin* (a — b) = 2 *sin* a.*cos* b.

Écrivons cette formule sous la forme homogène

$$1\times[\sin(a+b)+\sin(a-b)]=2\sin a\times\cos b.$$

Soient (*fig.* 4) $\overline{MA}=\overline{MA'}=a$ et $\overline{MB}=\overline{MB'}=b$. On aura, à cause de la décomposition du quadrilatère AOA′L′

en deux triangles OAB′ et OA′B′ et aussi les deux triangles OAA′ et AA′B′

$$OB' \times (AK + A'K') = AA' \times (OP + PQ)$$

ou $$[\sin(a + b) + \sin(a - b)] = 2 \sin a \times \cos b.$$

6. $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a . \sin b.$

Sous une forme homogène, on a

$$1 \times \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2} = \cos a \times \sin b.$$

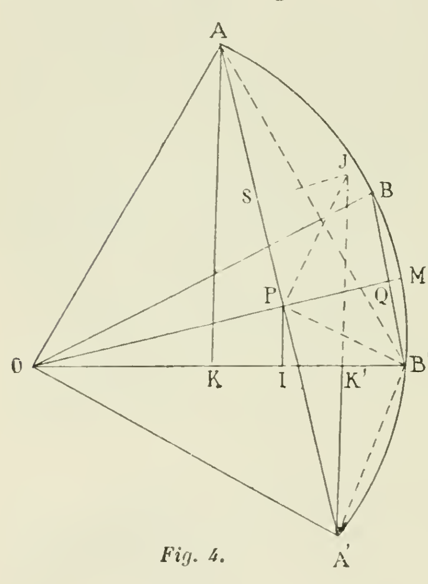


Fig. 4.

Le triangle OPB′ (*fig. 4*) a pour expressions du double de son aire

OP×B′Q et OB′×PI,

d'où la relation

$$OP \times B'Q = OB' \times PI.$$

En remarquant que

$$PI = \frac{1}{2}(AK - A'K'),$$

il vient

$$OP \times B'Q = OB' \times \frac{1}{2}(AK - A'K'),$$

c'est-à-dire

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sin(a + b) \\ - \sin(a - b)\end{bmatrix}.$$

7. $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a . \cos b.$

On considère encore la formule homogène

$$1 \times \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} = \cos a \times \cos b.$$

Le quadrilatère PIB′Q (*fig. 4*) est inscriptible; si donc on imagine une circonférence passant par ses quatre sommets, la propriété des sécantes issues d'un même point O, donne

$$OB' \times OI = OP \times OQ,$$

ou $$\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} = \cos a \times \cos b.$$

8. $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a . \sin b.$

Comme précédemment, on écrit

$$1 \times \left[\frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}\right] = \sin a \times \sin b.$$

Si l'on prolonge A'K' d'une longueur K'J telle que A'J soit égal au rayon 1, la perpendiculaire JS est égale à $\sin b$, car $\widehat{PA'K'} = b$. Alors le triangle PJA' aura pour le double de son aire les deux expressions PA' $\times$ JS et A'J $\times$ IK' et, comme $IK' = \frac{OK' - OK}{2}$, on aura

$$A'J \times \frac{OK' - OK}{2} = PA' \times JS,$$

ou

$$\frac{\cos(a-b) \cos(a+b)}{2} = \sin a . \sin b.$$

NOTICE HISTORIQUE SUR LA TRIGONOMÉTRIE

Par M. **Aubry.**

(Suite et fin.)

NOTE SUR LA THÉORIE DES SECTIONS ANGULAIRES

Cette théorie consiste à rechercher les équations auxquelles conduit la division des angles en parties égales. Les méthodes employées par Viète et ses successeurs ont une élégance qui devrait bien les sauver de l'oubli.

Les théorèmes de Viète peuvent être présentés ainsi :

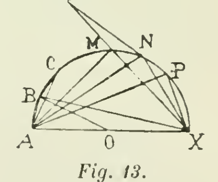


Fig. 13.

I. — Considérons les arcs égaux AB, MN, NP *(fig. 13)* et le diamètre AX; joignons les points B, M, N, P au point X et prenons sur MX le point H tel que NH = NX. Les triangles NHX, BOX sont semblables et de plus HM = PX. Donc

$$\frac{BX}{OX} = \frac{HX}{NX} = \frac{MX + PX}{NX},$$

d'où

$$PX = \frac{NX . BX}{OX} - MX.$$

Si on fait avec Viète $OX = 1$, $BX = x$ (*), cette relation devient

(α) $$PX = x.NX - MX.$$

Soient maintenant les arcs successifs égaux AB, BC, CD, DE,... (*fig.* 14); on a d'après (α)

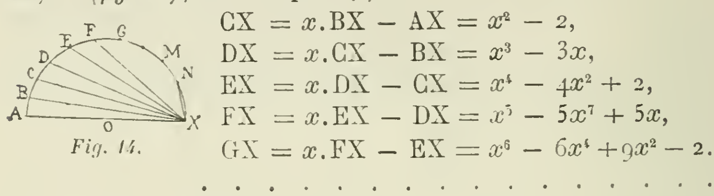


Fig. 14.

$$CX = x.BX - AX = x^2 - 2,$$
$$DX = x.CX - BX = x^3 - 3x,$$
$$EX = x.DX - CX = x^4 - 4x^2 + 2,$$
$$FX = x.EX - DX = x^5 - 5x^7 + 5x,$$
$$GX = x.FX - EX = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2.$$

. . . .

II. — On a de même (*fig.* 13)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AN}{AM + AP},$$

d'où $$AP = \frac{AN.AC}{AB} - AM$$

ou, en posant $AB = 1$, $AC = x$.

(β) $$AP = x.AN - AM.$$

De là le tableau suivant (*fig.* 14)

$$AD = x.AC - AB = x^2 - 1,$$
$$AE = x.AD - AC = x^3 - 2x,$$
$$AF = x.AE - AD = x^4 - 3x^2 + 1,$$
$$AG = x.AF - AE = x^5 - 4x^3 + 3x.$$

. . . .

III. — Prenons sur la circonférence AX (*fig.* 15) les arcs égaux AB, DE, EF, FG, XZ, et joignons ZE, GA; on a

$$NZ = GZ = XF, \qquad EZ = XD.$$

Les triangles ABO, EAN sont semblables, et par suite

$$\frac{EA}{BO} = \frac{EN}{BA} = \frac{XD - AF}{BA},$$

d'où, en posant $BO = 1$, $BA = x$.

(γ) $$\begin{cases} FX = DX - x.AE. \\ DX = FX + x.AE. \end{cases}$$

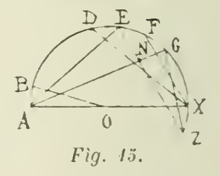


Fig. 15.

(*) Au lieu de x et de ses puissances, x^2, x^3, ... x^9, Viète écrit N, Q, C, LL, LC, CB, LQC, LCC, CCC, abréviations de *numerus*, *quadratus*, *cubus*, etc.

Par conséquent *(fig. 14)*

$$CX = AX - x.BA = 2 - x^2,$$
$$DA = BA + x.CX = 3x - x^3,$$
$$EX = CX - x.DA = 2 - 4x^2 + x^4,$$
$$FA = DA + x.EX = 5x - 5x^3 + x^5,$$
$$GX = EX - x.FA = 2 - 9x^2 + 6x^4 - x^6.$$

. . . .

Viète donne les huit premières formules de chacun des trois tableaux qui précèdent, en expliquant la loi de formation des coefficients au moyen de ceux des formules précédentes à la manière des nombres figurés.

Oughtred (*Clavis mathematica*, Londres, 1631) a expliqué avec beaucoup de détails le théorème III. Il devait, ainsi qu'Harriot, la connaissance des écrits de Viète, — très rares avant leur édition par Schooten, — à Anderson, disciple de Viète, et éditeur de plusieurs de ses œuvres.

On doit à Newton une démonstration très simple des formules de ce même théorème (*Lettre à Oldenbourg*, 1676, et *Arith. univ.*). Soit un angle suffisamment aigu A *(fig. 16)*; prenons successivement AB = BC = CD = DE = ... L'angle A est la moitié de l'angle CBD, le tiers de l'angle DCM, le quart de l'angle EDN, etc. Les triangles ABK, ACL, ADM, AEN,... sont semblables; de là les relations

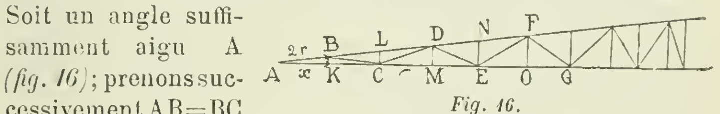


Fig. 16.

$$BL = AL - AB = \frac{AK}{AB} AC - AB = \frac{x^2}{r} - 2r,$$

$$CM = AM - AC = \frac{AK}{AB}(AC = 2.AL - AB) - AC = \frac{x^3}{r^2} - 3x,$$

$$DN = AN - AD = \frac{AK}{AB}(AE = 2.AM - AC) - AD = \frac{x^4}{r^3} - \frac{4x^2}{r} + 2r,$$

$$EO = AO - AE = \frac{AK}{AB}(AF = 2.AN - AD) - AE = \frac{x^5}{r^4} - \frac{5x^3}{r^2} + 5x.$$

. . . .

Dans les *Mém. de l'Acad. des sc.* pour 1702, on trouve de Jacques Bernoulli, une démonstration nouvelle des mêmes formules. Considérons dans la circonférence AX (*fig. 17*) les arcs égaux AK, AB, BC, et joignons BK, AC, CX. Les triangles ABO, BKX étant semblables, on a

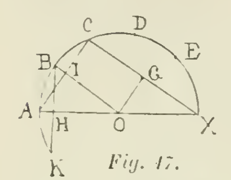


Fig. 17.

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{BK}},$$

d'où, comme $\mathrm{BX}^2 = 4.\overline{\mathrm{BO}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2$, et en posant $\mathrm{AO} = 1$, $\mathrm{AB} = x$,

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BK}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{BA}}^2.\overline{\mathrm{BX}}^2}{\mathrm{BO}^2} = 4x^2 - x^4.$$

De même, si $\mathrm{CE} = \mathrm{AC}$,

$$\overline{\mathrm{AE}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{CA}}^2.\overline{\mathrm{CX}}^2}{\overline{\mathrm{CO}}^2} = 16x^2 - 20x^4 + 8x^6 - x^8.$$

En général, m étant une puissance de 2, on a pour la corde m^{uple} l'expression

$$(\alpha)\quad m^2x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3.4}x^4 + \frac{m^2(m^2-1)(m^2-4)}{3.4.5.6}x^6 - \ldots$$

Il montre par une méthode d'interpolation, peu rigoureuse d'ailleurs, que la formule (α) a lieu pour une valeur entière quelconque de m. Par la simple soustraction de 4, ces formules donneront les carrés des cordes BX, DX, EX, ...

Connaissant les expressions des carrés des cordes, il est facile d'en déduire celles de ces mêmes cordes. En effet, si G est le milieu de CX, on aura

$$\mathrm{CX} = 2.\mathrm{CG} = 2.\mathrm{OI} = 2.\mathrm{HO} = 2.\mathrm{HX} - 2.\mathrm{OX}$$
$$= 2\frac{\overline{\mathrm{BX}}^2}{\mathrm{AX}} - \mathrm{AX} = \overline{\mathrm{BX}}^2 - 2 = 2 - \overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Dans son *Traité anal. des sect. con.* (Paris, 1707), le marquis de l'Hospital a donné une remarquable étude des sections angulaires. Il commence par une exposition très nette du théorème I de Viète, en discutant les divers cas qui peuvent se présenter, ainsi que les racines des équations correspondantes, et réduit les formules de Viète à la formule unique

$$\mathrm{NX} = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}x^{n-6} + \ldots$$

et en tire plusieurs théorèmes sur les sommes et les produits des distances d'un point quelconque de la circonférence aux sommets d'un polygone régulier inscrit.

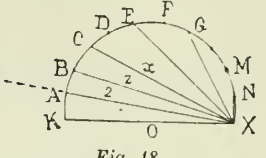


Fig. 18.

Il recherche ensuite les équations déterminant l'inscription des polygones réguliers d'un nombre impair de côtés. Soient les arcs égaux AK, AB, BC, CD, ... *(fig. 18)*. On a

$$\frac{OC}{CX} = \frac{BX}{DX + KX} \qquad \text{d'où} \qquad CX = zx - x.$$

De même $EX = z.CX - BX = z^2x - zx - x$.

En général, on a la formule

$$NX = xz^n - xz^{n-1} - (n-1)xz^{n-2} + \ldots$$

Si on fait $NX = 0$, on a l'équation cherchée, qui est donc

$$z^n - z^{n-1} - (n-1)z^{n-2} + \ldots = 0.$$

Par exemple, les équations

$$z - 1 = 0$$
$$z^2 - z - 1 = 0$$
$$z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$$
$$z^4 - z^3 - 3z^2 + 2z + 1 = 0$$
$$z^5 - z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 3z - 1 = 0,$$

— dont chacune s'obtient en multipliant le premier membre de la précédente par z et retranchant de la pénultième, — servent à inscrire les polygones réguliers de 3, 5, 7, 9 et 11 côtés : les racines représentant les cordes CX, EX, GX, ...

Il termine par le théorème suivant : Soient les arcs égaux AB, EF *(fig 19)*. Appelons x, y, z, v les longueurs BX, AB, AE, EX. Les triangles ABG, AEX, XFG sont semblables, et on a

$$\frac{x}{z} = \frac{y}{BG}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{GX}{FX},$$
$$\frac{1}{v} = \frac{y}{AG}, \qquad \frac{1}{z} = \frac{GX}{GF},$$

d'où successivement

$$GX = x - \frac{yz}{v}, \qquad FX = vx - yz,$$
$$AF = xz + vy.$$

Donc, si on forme les deux suites A, B, C, D, ... et $a, b, c, d, \ldots$ telles qu'on ait

$$\begin{aligned} A &= x, & a &= y, \\ B &= Ax - ay, & b &= Ay + ax, \\ C &= Bx - by, & c &= By + bx, \\ D &= Cx - cy, & d &= Cy + cx, \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

les expressions B, C, ... représenteront les cordes CX, DX, ... et $b, c, \ldots$ les cordes CA, DA, ... et, de là, on tirera facilement les expressions générales, sous la forme d'une suite finie.

Enfin, nous terminerons par une remarque faite par Lagrange dans son *Calcul des fonctions*, où il récapitule les formules donnant les divers développements de $\cos nx$ et $\sin nx$ en rappelant que ces formules sont dues à Viète, à Newton et aux Bernoulli. Des relations

$$2\cos z \cos mz = \cos(m+1)z + \cos(m-1)z,$$
$$2\cos z \sin mz = \sin(m+1)z + \sin(m-1)z,$$

on conclut que la suite des sinus et des cosinus d'arcs en progression arithmétique est une suite récurrente qui a l'échelle de relation $2\cos z, -1$, remarque déjà faite par Euler, et qu'on peut en tirer les développements connus et $\sin mx$ et $\cos mx$.

EXERCICES DIVERS

Par **Aug. Boutin.**

397. — *On considère la suite récurrente :*

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad \ldots \qquad u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Vérifier les égalités :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.7} - \frac{1}{7.17} + \ldots \pm \frac{1}{u_n . u_{n-1}} \mp \ldots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.17} + \frac{1}{17.99} + \ldots + \frac{1}{u_{2n}u_{2n+2}} + \ldots$$

(Cette dernière est rapidement convergente.)

398. — 1° *On considère la suite récurrente:*

$$u_0 = 0, \; u_1 = 1, \; u_2 = 2, \ldots \; u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}:$$

démontrer que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.17} + \frac{1}{17.29} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n} + u_{2n-1})} + \frac{1}{u_{2n+1}(u_{2n+1} + u_{2n+2})} + \ldots$$

2° *On considère la suite récurrente :*

$$u_0 = 0. \; u_1 = 1, \; u_2 = 2a, \; u_3 = 4a^2 + 1, \ldots \; u_n = 2au_{n-1} + u_{n-2};$$

on a

$$\frac{1}{a + 1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{1}{(u_0 + u_1)(u_1 + u_2)} - \frac{1}{(u_1 + u_2)(u_2 + u_3)}$$
$$+ \frac{1}{(u_2 + u_3)(u_3 + u_4)} - \ldots$$

$$\frac{1}{2a(a + 1 + \sqrt{a^2 + 1})} = \frac{1}{(u_0 + u_1)(u_2 + u_3)} + \frac{1}{(u_2 + u_3)(u_4 + u_5)} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(u_{2n} + u_{2n+1})(u_{2n+2} + u_{2n+3})} + \ldots$$

399. — *Le produit de deux triangulaires consécutifs n'est jamais un carré.*

400. — *On peut toujours trouver une infinité de triangulaires dont le rapport soit* p, *quel que soit cet entier* p, *sauf s'il est un carré.*

On a à résoudre l'équation

(1) $$x(x + 1) = py(y + 1).$$

En posant $2x = k - 1$, $2y = z - 1$, elle devient

(2) $$K^2 - pz^2 = -(p - 1)$$

qui, par la méthode classique de Lagrange se ramène à

(3) $$\alpha^2 - p\beta^2 = 1$$

en posant $k = \alpha \mp p\beta$ $\quad z = \beta \mp \alpha.$

Or, (3) a une infinité de solutions, quand p n'est pas un carré, il en est donc de même de (2), et les formules précédentes fournissent pour k et z, ainsi qu'il convient, une infinité de valeurs impaires, quand elles ne le sont pas toutes.

Si p est un carré m^2, le problème, quand il est possible n'a plus qu'un nombre limité de solutions. Il n'y en a aucune pour $m = 2.3.4.5.7.8.9$ $11.12.13.15.16.17 \ldots$

Pour $m = 4k + 2$, l'équation $T' = m^2T$,
T et T', triangulaires), admet au moins la solution :

$$T = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Donc : *Quel que soit un triangulaire, on peut toujours le multiplier par un carré tellement choisi que le produit soit un triangulaire.*

401. — *Si un triangulaire est terminé par 3, le chiffre de ses dizaines est 0 ou 5, si un triangulaire est terminé par 8, le chiffre de ses dizaines est 2 ou 7.*

BACCALAURÉATS

Académie de Paris (juillet 1895).

BACCALAURÉAT CLASSIQUE *(LETTRES-MATHÉMATIQUES)*

I. — *Problème obligatoire :*

1° Calculer les côtés b et c d'un triangle, connaissait son périmètre $2p$, sa surface S, et sachant que l'angle A est de 60 degrés.

II. — *Trois questions à choisir :*

2° Longitude et latitude d'un lieu.

3° Ascension droite et déclinaison d'un astre.

4° Mouvement apparent des planètes sur la sphère céleste.

I. — *Problème obligatoire :*

9° Étant donnée une progression géométrique de raison x, on considère trois termes consécutifs de cette progression. On fait d'abord leur somme ; puis de cette somme on retranche le terme du milieu. Étudier la variation du rapport de la première expression à la seconde quand x varie.

II. — *Trois questions à choisir :*

10° Composition et décomposition des couples.

11° Centre de gravité de la pyramide.

12° Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné.

Académie de Lyon.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Questions au choix. — 1° *(a)* Volume du parallélépipède oblique.

(b) Volume du prisme triangulaire.

(c) Volume du tronc de prisme triangulaire.

2° *Problème.* — Un prisme droit de hauteur donnée h a pour bases deux hexagones réguliers d'un même côté donné a. Après avoir pris sur la droite qui joint les centres des bases un point I à une distance b de l'une d'elles, on mène par ce point un plan qui partage en deux troncs le prisme hexagonal. Exprimer les volumes de ces deux troncs qu'on décompose en prismes triangulaires ayant pour arête commune la droite des centres. On introduira dans le calcul toutes les longueurs auxiliaires qu'on jugera nécessaires et qu'on réduira le plus possible dans le résultat final.

BACCALAURÉAT COMPLET

1° Balance ordinaire. — Justesse. — Sensibilité. — Équation d'équilibre.

2° Trouver l'expression de la somme $1 + 2x + 3x^2 + \ldots nx^{n-1} + (n+1)x^n$ pour n déterminé quelconque, mais entier.

Si l'on suppose $x < 1$, vers quelle limite tend cette somme quand n croît indéfiniment ?

Académie de Montpellier.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

Un triangle isoscèle ABC tourne autour de sa base BC. Déterminer la position d'une droite EF, de longueur donnée, dont les extrémités sont situées sur les côtés égaux AB, AC, sachant que la surface engendrée par ce segment est équivalente à celle d'un cercle donné. Entre quelles limites doit varier le rayon de ce cercle pour que le rayon soit possible.

1° Trouver les projections de l'intersection des deux plans. On supposera que le premier plan est donné par ses traces, tandis que le second est déterminé par la ligne de terre et un point dont l'on donne les projections.

2° ABCD étant un tétraèdre dont les quatre côtés sont égaux, trouver sur AB un point M tel que l'angle CMD ait une valeur donnée.

On considère, dans un plan vertical, deux segments de droites, AB, BC. Les points A et C sont à la même distance,

$$AH = CK = h$$

de l'horizontale HBK qui passe par le point B; ce point B est, de plus supposé situé entre H et K.

Soient : t_1 le temps qu'un point matériel pesant abandonné en A sur la droite AB mettrait à atteindre le point B ; t_2 le temps qu'un point matériel pesant, abandonné en C sur la droite CB, mettrait à atteindre le point B, et enfin T le temps qu'un point matériel pesant, abandonné librement dans l'espace, mettrait à descendre d'une hauteur égale à AB + BC.

Cela étant, on demande de déterminer les inclinaisons des deux droites AB et BC sur l'horizontale par les deux conditions :

1° Que la suite t_1, T, t_2 forme une progression arithmétique;

2° Que la somme des volumes engendrés par les triangles AHB, BKC, en tournant respectivement autour de AB et de BC, soit égale à m fois le volume de la sphère de rayon h. — Discussion.

BACCALAURÉAT COMPLET

1° Résoudre l'équation :

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}. \quad (*)$$

2° Étant donnés deux cercles, dont l'un est intérieur à l'autre, déterminer un troisième cercle tangent à chacun des précédents et tel que les trois centres forment un triangle d'aire donnée. — Discussion.

On connaît l'hypoténuse a d'un triangle rectangle et la somme l des deux autres côtés et de la hauteur correspondant à l'hypoténuse. Calculer cette hauteur et les côtés du triangle. — Discuter le problème.

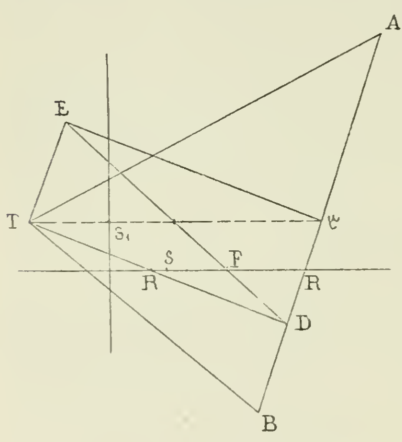
(*) Il est utile d'observer que $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

QUESTION 587

Solution par M. Davidoglou.

On considère une corde quelconque AB *perpendiculaire à l'axe d'une parabole donnée* P. *Le cercle décrit sur* AB *comme diamètre enveloppe une parabole. Ce cercle rencontre la parabole* P *suivant une autre corde* CD *parallèle à* AB : *les deux cordes* CD *et* AB *sont toujours à une distance constante.*

Soit S, F, O respectivement le sommet, le foyer de P et le centre de AB.



Projetons C en E sur SF. La relation $\overline{CE}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{EO}^2$, combinée avec les relations connues: $\overline{AO}^2 = 2p.SO$, $\overline{CE}^2 = 2p(SO - OE)$, donne: $2pSO - 2p.OE = 2p.SO - \overline{OE}^2$, d'où $OE = 2p$. On verrait de même que, si l'on projette D en E' sur SF, on aura $OE' = 2p = OE$; E et E' se confondent; il suit de là que CD est parallèle à AB et sa distance à cette dernière droite est constante.

Par le milieu μ de EO élevons μM perpendiculaire à SF et qui coupe le cercle O en M.

La relation $\overline{M\mu}^2 = \overline{AO}^2 - p^2 = 2p\left(SO - \frac{p}{2}\right) = 2p.D\mu$

montre que le cercle O enveloppe une parabole ayant S comme foyer, la directrice de P pour tangente au sommet.

Nota. — Mme Vve F. Prime nous a adressé une solution analytique de cette question.

M. Droz-Farny observe que la question peut être généralisée :

Soit une corde AB quelconque de la parabole qui rencontre l'axe en α. Le cercle décrit sur AB comme diamètre rencontre la parabole

suivant une sécante CD qui coupe l'axe en β; la distance $\alpha\beta$ est toujours égale à $2p$.

Ce théorème se laisse démontrer très élémentairement; il donne lieu à de nombreuses conséquences. Il a été d'ailleurs énoncé dans la *N. C. M.* (1877, 32 et 319) par Catalan.

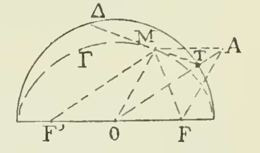
QUESTION 588

Solution, par M. Jean Négrétzu.

On considère une demi-ellipse Γ *et le demi-cercle principal correspondant* Δ. *Soient:* M, *un point de* Γ; O, *le centre de* Γ; F, *l'un des foyers. On trace* MA *équipollent à* OF.

Démontrer que OA *rencontre* Δ *en un point qui appartient à la tangente en* M. (G. L.)

Soient O le centre de l'ellipse, F′ l'autre foyer. Le quadrilatère OMAF est un parallélogramme. Il en est de même de F′MAO, puisque F′O = FO = MA. Donc, la droite OA est parallèle à F′M. Or, on sait que la parallèle, menée par le centre de l'ellipse, au rayon vecteur qui joint le point de contact d'une tangente à l'ellipse, rencontre le cercle principal en un point qui appartient à la tangente; donc...



Nota. — Solutions analogues de MM. Droz-Farny; E.-N. Barisien; G. Tzitzéica; Davidoglou, élève au lycée de Berlad et A. Champion.

Nous avons aussi reçu une solution analytique de M. Vazou, au collège de Falaise.

QUESTION 590

Solution par A. Droz-Farny.

On considère un cercle Δ, *un diamètre* AB *de ce cercle et une corde* CD *perpendiculaire à* AB. *Au-dessus de* AB, *on décrit un cercle* Δ′, *tangent à* AB *et à* CD, *touchant* Δ *intérieurement; puis un cercle* Δ″, *tangent à* AB *et à* CD, *touchant* Δ *extérieurement. Ces deux cercles* Δ′, Δ″ *sont tangents à* CD, *de part et d'autre de cette droite.*

Δ' a pour centre ω, il touche AB *en* H *et* CD *en* H'; *Δ'' a pour centre ω', il touche* AB *en* K *et* CD *en* K'. *Cela posé :*

1° Les droites CH *et* CK *sont rectangulaires;*

2° Les points H' *et* K' *forment avec les points* C *et* D *une division harmonique;*

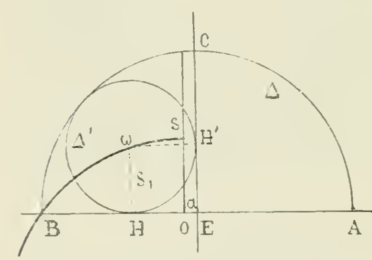
3° La droite $\omega\omega'$ passe par une des extrémités du diamètre AB.

(E.-N. Barisien.)

Soient O le centre du cercle Δ, R son rayon et E le point d'intersection de la corde CD avec AB, enfin ρ' et ρ'' les rayons des circonférences Δ' et Δ'', et a la distance OE.

On démontre aisément que les centres des circonférences tangentes à AB et au cercle Δ soit intérieurement, soit extérieurement, sont sur deux paraboles de même axe, le diamètre de Δ perpendiculaire à AB. admettant O comme foyers et R pour paramètre.

Les coordonnées du point ω ayant respectivement pour valeurs



$$\text{HO} = \rho_1 - a \text{ et } \frac{R}{2} - \rho_1,$$

on a la relation :

$$(\rho_1 - a)^2 = 2R\left(\frac{R}{2} - \rho_1\right),$$

d'où, finalement :

$$\rho_1 = \sqrt{2R(R-a)} - (R-a).$$

De la même manière, on trouverait pour le centre ω' la relation

$$\overline{KO}^2 = 2R\left(\frac{R}{2} + \rho_2\right)$$

$$(\rho_2 + a)^2 = 2R\left(\frac{R}{2} + \rho_2\right)$$

d'où
$$\rho_2 = \sqrt{2R(R-a)} + (R-a).$$

De ces valeurs, on déduit d'abord :

$$\rho_1\rho_2 = 2R^2 - 2aR - (R-a)^2 = R^2 - a^2 = (R+a)(R-a),$$

donc
$$\text{EH.EK} = \text{EB.EA} = \overline{EC}^2;$$

l'angle HCK est donc droit.

Comme $EH = EH'$ et $EK = EK'$ on a aussi :

$$EH'.EK' = \overline{EC}^2 = \overline{ED}^2,$$

donc $$(CDH'K') = -1.$$

Enfin

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sqrt{2R(R-a)} + (R-a)}{\sqrt{2R(R-a)} - (R-a)} = \frac{R+a+2\rho_2}{R+a} = \frac{R+a+\rho_2}{R+a-\rho_1},$$

ou $$\frac{\omega' K}{\omega H} = \frac{BK}{BH}.$$

Les points B, ω, ω' sont donc en ligne droite.

Nota. — Nous avons reçu d'autres solutions de M. Davidoglou, élève au lycée Codreano à Berlad et de M. A. Champion et une solution analytique de M. Vazou, professeur au collège de Falaise.

QUESTION 593

On considère trois points en ligne droite A, B, C (C *étant situé entre* A *et* B) *et on décrit les cercles ayant pour diamètres respectifs* AB, CA *et* CB. *Le cercle tangent à la fois à ces trois cercles touche le cercle* CA *en* M *et le cercle* CB *en* N. *Les quatre points* M, N, A et B *sont sur un même cercle.* (E.-N. Barisien.)

La propriété énoncée sera établie si l'on prouve que

(1) $$\widehat{BAM} = 180° - \widehat{BNM}.$$

On a, en effet :

(2) $$\widehat{BAM} = \frac{\widehat{O''O'\omega}}{2}$$

et $$\widehat{BNM} = \widehat{BNO''} + \widehat{MNO'} = \frac{\widehat{O'O''\omega}}{2} + 180° - \widehat{MN\omega}$$

ou

(3) $$\left\{ \begin{aligned} \widehat{BNM} &= \frac{\widehat{O'O''\omega}}{2} + 180° - \left(90° - \frac{\widehat{O'\omega O''}}{2}\right) \\ &= \frac{\widehat{O'O''\omega} + \widehat{O'\omega O''} + 180°}{2}. \end{aligned} \right.$$

En ajoutant (2) et (3), et en observant que la somme des angles du triangle O'O''ω est égale 180°, on a la relation (1). On voit que, dans cette démonstration, on ne fait pas entrer la condition de contact entre la circonférence ω et la circonférence décrite sur AB comme diamètre. La proposition énoncée peut donc être formulée de la manière suivante :

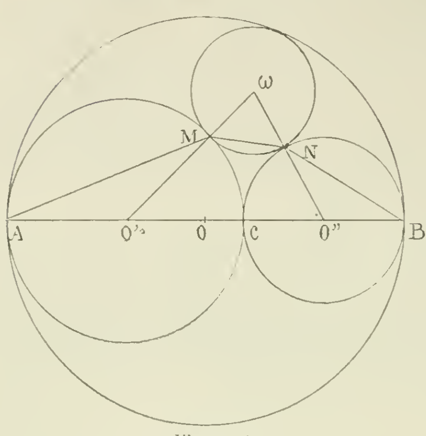


Fig. 593.

Étant données deux circonférences se touchant en C, *les points de contact d'une circonférence qui les touche l'une et l'autre et les extrémités des diamètres qui passent par* C *sont quatre points concycliques.*

Nota. — Nous avons reçu diverses solutions de cette question de : MM. Davidoglou, élève au lycée Codréano, à Berlad; E. Leroy, commis des Ponts et Chaussées et A. Champion.

MM. G. Tzitzeica et César Spino démontrent la proposition en formant la figure inverse; le premier, en prenant le point A pour pôle d'inversion, l'autre, en le mettant en C.

M. César Spino, après avoir reconnu que la proposition est susceptible d'extension, observe que l'on peut supposer le rayon de ω infiniment grand : on arrive ainsi à la remarque suivante : *Lorsque deux circonférences se touchent en* C, *les points de contact de la tangente commune et les extrémités du diamètre qui correspondent au point* C *sont concycliques.* On sait que cette propriété est le cas particulier d'une propriété plus générale relative à deux circonférences quelconques. *Si, par le centre de similitude de deux circonférences, on mène deux transversales, les points de rencontre, convenablement choisis, sont, quatre à quatre, concycliques.*

QUESTION 595

Solution, par M. A. Droz-Farny.

La droite qui joint l'orthocentre d'un triangle à son centre de gravité ne peut passer par un des sommets du triangle que si le triangle est rectangle ou isoscèle. (E.-N. Barisien.)

La droite d'Euler du triangle passe aussi par le centre du cercle circonscrit O. Exprimons la surface du triangle HOA en fonction des éléments du triangle donné. On a :

$$HA = 2R\cos A\,;\quad OA = R;\quad \text{angle } HAO = B - C$$

$$\Delta HOA = \frac{1}{2}.HA.OA.\sin HAO = R^2\cos A.\sin(B - C).$$

Si la droite d'Euler passe par le sommet du triangle A, la surface HOA sera nulle, ce qui peut avoir lieu pour

$$\cos A = 0,\quad \text{ou}\quad A = 90^\circ,$$

et

$$\sin(B - C) = 0,\quad \text{ou}\quad B = C.$$

Autrement (*). — Soient G le centre de gravité, et H l'orthocentre d'un triangle ABC.

1° Si l'un des deux points considérés se confond avec un sommet du triangle, la droite GH remplira la condition énoncée.

Si le point G était sommet du triangle, ce triangle se réduirait à un point.

Le point H ne peut être sommet du triangle ABC que si ce triangle est *rectangle;* l'orthocentre se confond alors avec le sommet de l'angle droit.

2° Les deux points G et H étant à l'intérieur du triangle, si la droite GH passe par le sommet B, par exemple, la ligne BGH est alors à la fois médiane et hauteur dans le triangle ABC et ce triangle est alors nécessairement *isoscèle.*

L'énoncé du problème se trouve ainsi complètement justifié.

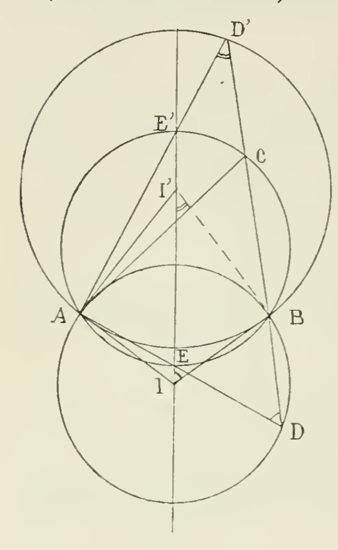
Nota. — M. Négretzu, de Bucarest, nous a envoyé aussi une solution analytique.

(*) Cette solution est de M. Leroy, commis des Ponts et Chaussées.

QUESTION 598

Solution par M. Vazou.

La médiatrice du côté AB *du triangle* ABC *rencontre la circonférence* ABC *en* E, E′ *et les droites* AE, AE′ *rencontrent* BC *en* D *et* D′. *Démontrer que la circonférence* BED *passe par le centre de la circonférence* BAD, *et, de même, la circonférence* BE′D′ *par le centre de la circonférence* BAD′. (Bernès.)



Soit I le centre de la circonférence BAD; l'angle au centre AIB est le double de l'angle inscrit ADB, par suite, $\widehat{EIB} = \widehat{ADB}$, ce qui montre que les quatre points E, B, D, L sont concycliques.

De même I′ désignant le centre de la circonférence ABD′, on a $\widehat{AI'B} = 2.\widehat{AD'B}$, d'où $\widehat{EI'B} = \widehat{AD'B}$, etc...

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny A. Champion et Jean Négretzu, à Bucarest.

QUESTION 602

Solution par M. A. Droz-Farny.

L'expression $3\,600^n - 1\,600^n - 189^n + 84^n$ *est divisible par* 1895. (Davidoglou.)

Cette expression s'écrit, successivement :

$$400^n.9^n - 400^n.4^n - 21^n.9^n + 21^n.4^n,$$

$$400^n(9^n - 4^n) - 21^n(9^n - 4^n),$$

et, enfin

$$(9^n - 4^n)(400^n - 21^n).$$

Le premier facteur étant divisible par $9 - 4 = 5$ et le second par $400 - 21 = 379$, l'expression est divisible par

$$5.379 = 1895.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. Alfred CHAMPION ; DHAVERNAS, élève au lycée Michelet; Jean NÉGRETZU, à Bucarest; LECOMTE, élève au collège Chaptal.

QUESTION 603

Solution par M. ANGEL BOZAL-OBEJERO, professeur à l'Institut libre de Santona (Espagne).

Les deux relations

$$\frac{a_1}{1 + b_1} + \frac{a_2}{1 + b_2} + \ldots + \frac{a_n}{1 + b_n} = \frac{A}{1 + B},$$

$$\frac{a_1(B - b_1)}{1 + b_1} + \frac{a_2(B - b_2)}{1 + b_2} + \ldots + \frac{a_n(B - b_n)}{1 + b_n} = 0,$$

entraînent la suivante

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A.$$

(Vautré.)

Si l'on pose pour abréger

$$\frac{a_1}{1 + b_1} = K_1, \qquad \frac{a_2}{1 + b_2} = K_2, \qquad \ldots \frac{a_n}{1 + b_n} = K_n,$$

les deux relations deviennent

$$\left.\begin{matrix} K_1(1 + B) + K_2(1 + B) + \ldots + K_n(1 + B) = A \\ K_1(B - b_1) + K_2(B - b_2) + \ldots + K_n(B - b_n) = 0 \end{matrix}\right\},$$

d'où, en retranchant

$$K_1(1 + b_1) + K_2(1 + b_2) + \ldots + K_n(1 + b_n) = A.$$

Or, on a

$$K_1(1 + b_1) = a_1 \quad K_2(1 + b_2) = a_2, \quad \ldots K_n(1 + b_n) = a_n,$$

et, par conséquent,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Alfred CHAMPION; Jean NÉGRETZU ; DHAVERNAS, élève au lycée Michelet; DROZ-FARNY.

QUESTIONS PROPOSÉES

656. — M est un point arbitraire du plan du triangle ABC; on construit l'angle $\widehat{MBX} = \widehat{MAC}$ (grandeur et signe) et l'angle $\widehat{MCY} = \widehat{MAB}$. M′ étant l'intersection de BX et CY, montrer que si M parcourt une droite ou un cercle, M′ parcourt généralement un cercle. Plus généralement, M décrivant un certain lieu, quel est le lieu décrit par M′? Faire voir que le triangle M′BC est directement semblable au triangle podaire du point M relativement à ABC. *(Bernès.)*

657. — Le point M où se coupent les deux droites symétriques de BC, l'une relativement à la hauteur BK du triangle ABC et l'autre relativement à la hauteur CL, et les points N et P où ces mêmes hauteurs rencontrent respectivement la parallèle menée par C à AB et la parallèle menée par B à AC, sont trois points en ligne droite. De plus, si Q est la rencontre de cette droite MNP et de la médiatrice de BC, les deux angles QBC, QCB sont égaux à l'angle A du triangle ABC.

(Bernès.)

658. — Par le sommet de l'angle A du triangle ABC on mène deux isogonales quelconques Ax, Ay, et, par le milieu D de BC, on trace, entre ces deux droites, le segment MN partagé en D en deux parties égales. Les droites BN, CN rencontrant AM en β, γ, démontrer que les tangentes en B et C aux circonférences $AB\beta$, $AC\gamma$ se rencontrent sur AN.

(Bernès.)

659. — Dans un triangle ABC on considère les centres O_B et O_C des cercles exinscrits dans les angles B et C et on projette ces centres en O'_B et O'_C sur le côté BC. La droite O_CO_B rencontre BC en A′. Montrer que :

1° Les points A et A′ sont conjugués harmoniques des points O_C et O_B;

2° L'ellipse ayant pour sommet du grand axe les points O'_C et O'_B et passant par A jouit de la propriété d'être tangente à la droite O_CO_B et d'avoir pour foyers les points B et C.

(E.-N. Barisien.)

660. — Soient O le centre d'inversion, A et B deux points d'une figure, A′ et B′ les points correspondants de la figure inverse. Démontrer que la médiane et la symédiane du triangle AOB, issues de O, sont respectivement symédiane et médiane du triangle A′OB′. (*A. Cazamian.*)

661. — Étant donné un triangle ABC : 1° Si sur AB à partir de B on porte dans les deux sens une même longueur arbitraire l en BD, BD′, les tangentes en B aux deux cercles BCD, BCD′ sont conjuguées harmoniques relativement à BA, BC; 2° Si l'on porte dans un même sens deux longueurs BD, BD_1, ayant a pour moyenne proportionnelle les tangentes en B aux deux cercles BCD, BCD_1 sont isogonales relativement à l'angle B. Cas particulier où $BD = c$. (*Bernès.*)

662. — Dans un triangle ABC, on prolonge AB de BD égal à $\frac{b^2}{c}$ et AC de CE égal à $\frac{c^2}{b}$. Montrer que les quatre points B, C, D, E sont sur une même circonférence et que les tangentes en B et C à cette circonférence passent, l'une par un des points de Brocard, l'autre par l'autre.

Nota. — L'angle CDB est égal à l'angle de Brocard. On peut construire ainsi cet angle avec une simplicité géométrographique égale à 14. (*Bernès.*)

663. — Dans un triangle ABC, le pied de la hauteur abaissée de A étant A′, et P, Q désignant les projections de B, C sur le rayon AO du cercle ABC, le cercle A′PQ a pour centre le milieu de BC. (*Bernès.*)

664. — Par le sommet A du triangle ABC, on trace une droite quelconque X sur laquelle on projette B et C en P et Q; et E étant la rencontre de cette droite avec la médiatrice de BC, on porte sur X $E\alpha = EB$ et on projette α en A′ sur BC. Le cercle A′PQ a son centre au milieu de BC.

Plus généralement, si X, E et α étant définis de même, A′ est un point arbitraire de BC et P et Q, les rencontres de X avec les deux parallèles menées par B et C dans la direction définie par $(BP, X) = (BC, \alpha A')$ où les angles sont pris

en grandeur et signe à $K\pi$ près, le cercle $A'PQ$ aura son centre à la rencontre de BC et d'une parallèle à $\alpha A'$ menée par E. *(Bernès.)*

665. — Dans un quadrilatère plan quelconque, convexe ou non, on donne $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et le produit $AC \times BD = m^2$, construire le quadrilatère. On montrera que les conditions de possibilité sont que la plus grande des longueurs a, b, c, d soit moindre que la somme des trois autres et que m^2 soit compris entre $ac + bd$ et la plus grande des deux quantités $\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$, $ac - bd$ prises en valeur absolue. Quelle est la forme du quadrilatère pour les valeurs-limites de m^2? *(Bernès.)*

666. — Construire un quadrilatère dont on donne a, b, c, d définis comme dans la question précédente et la différence θ entre les deux angles, définis en grandeur et signe à $2K\pi$ près, sous lesquels de A et C on voit BD. On montrera que lorsque $ac - bd$ a une plus grande valeur absolue que $\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$, θ peut prendre toutes les valeurs entre $+\pi$ et $-\pi$. et on déterminera les limites de θ dans le cas contraire. On doit aussi trouver, comme condition de possibilité, que la plus grande des quantités a, b, c, d est moindre que la somme des trois autres. *(Bernès.)*

667. — a, b, c, d, θ ayant la même signification que dans la question précédente, montrer que AC et BD sont donnés par les relations

$$AC.BD = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd \cos\theta},$$

$$[a^2b^2+c^2d^2-2abcd \cos\theta]\overline{AC}^2+[a^2d^2+b^2c^2-2abcd \cos\theta]\overline{BD}^2 = 2[\Sigma a^2b^2c^2 - abcd.\Sigma a^2.\cos\theta];$$

qui donnent

$$[a^2b^2+c^2d^2-2abcd \cos\theta]\overline{AC}^4-2[\Sigma a^2b^2c^2-abcd.\Sigma a^2.\cos\theta]\overline{AC}^2 + [a^2d^2+b^2c^2-2abcd \cos\theta][a^2c^2+b^2d^2-2abcd \cos\theta]=0,$$

avec une équation analogue pour BD. *(Bernès.)*

Le Directeur-gérant,

G. DE LONCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14924-7-95.

NOTES SUR LE PENTAGONE RÉGULIER

Par M. **A. Droz-Farny.**

1. — Le journal de *Mathématiques élémentaires*, année 1893, page 17, a donné une construction très simple du pentagone régulier inscrit dans une circonférence.

Qu'il me soit permis d'indiquer la construction, très simple aussi, du pentagone régulier dont on connaît la longueur du côté.

Représentons par a le côté du pentagone ABCDE et par x la longueur d'une de ses diagonales; en appliquant au quadrilatère inscriptible BCDE, le théorème de Ptolémée, on obtient immédiatement la relation :

$$x^2 - ax - a^2 = 0,$$

d'où

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

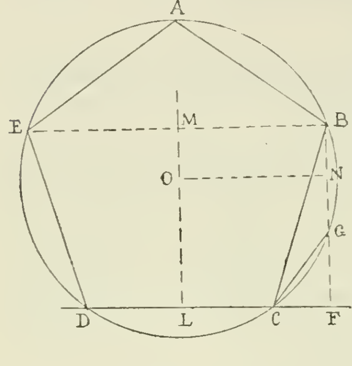
Sur une droite indéfinie, portons $DC = a$ et soit O le point milieu de DC. De D et C comme centres, avec a comme rayon, décrivons les circonférences (D) et (C). La perpendiculaire DF élevée, en D, sur DC, coupe (D) en F; on aura évidemment

$$OF = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Décrivons de O comme centre, avec OF comme rayon, une circonférence coupant DC en M et M'. Les circonférences décrites de C et de D comme centres avec $CM = DM' = x$ comme rayons se coupent en A et rencontrent (D) et (C) respectivement en E et B.

ABCDE sera le pentagone cherché.

2. — Du sommet B d'un pentagone régulier, inscrit dans une circonférence, abaissons la perpendiculaire BF sur le côté DC. Cette perpendiculaire rencontre en G la circonférence circonscrite. Comme l'angle $BCF = 72°$ on a : angle $CBG = 18°$ et par conséquent le point G est le milieu de l'arc BC; donc BG et GC sont deux côtés consécutifs du décagone régulier inscrit. D'après un théorème connu, on a :



$$\overline{BC}^2 - \overline{CG}^2 = R^2,$$

donc

$$\overline{BF}^2 - \overline{GF}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{GC}^2 = R^2,$$

$$(BF + GF)BG = R^2;$$

donc $$(BG + 2GF) = \frac{R^2}{\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2},$$

$$2GF = \frac{R}{2}[\sqrt{5} + 1] - \frac{R}{2}[\sqrt{5} - 1] = R$$

d'où $$GF = \frac{R}{2}.$$

Comme dans la figure $MO = BN$ et $OL = NG + GF$, il en résulte immédiatement les deux théorèmes :

I. — *L'apothème du pentagone étoilé régulier est égal au demi-côté du décagone régulier inscrit dans la même circonférence.*

II. — *L'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.* [Question 623, proposée par M. Mannheim (*).]

(*) Deux solutions de cette question paraîtront dans le numéro prochain.

DÉTERMINATION DU CENTRE DE SIMILITUDE
DE DEUX FIGURES DIRECTEMENT SEMBLABLES ABC, A'B'C'

Soient AB, A'B' deux côtés homologues donnant lieu à un quadrilatère convexe (seul cas que nous voulions examiner).

1er moyen. — Déterminons le *point de Miquel* du quadrilatère convexe ABB'A', par exemple, en décrivant les cercles circonscrits AA'D' et BB'D'. Le point S est le point double demandé, car les triangles ASB, A'SB' sont directement semblables.

Les cercles DAB, DA'B' donneraient le même point S. Ces quatre cercles peuvent être nommés *cercles de Miquel du quadrilatère.*

2e moyen. — Déterminons les points conjugués M et M' tels qu'on ait :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{M'A}{M'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Le cercle dont MM' est le diamètre est le lieu des points dont les distances aux points fixes A et A' égale le rapport des côtés homologues AB, A'B'; donc, ce cercle passe par le point S; il en est de même pour le cercle analogue, ayant NN' pour diamètre; ainsi le *point double* S peut être obtenu par l'intersection des cercles MM' et NN'.

Ce moyen donne aussi le centre S' pour deux figures inversement semblables ABC, A'B'C''.

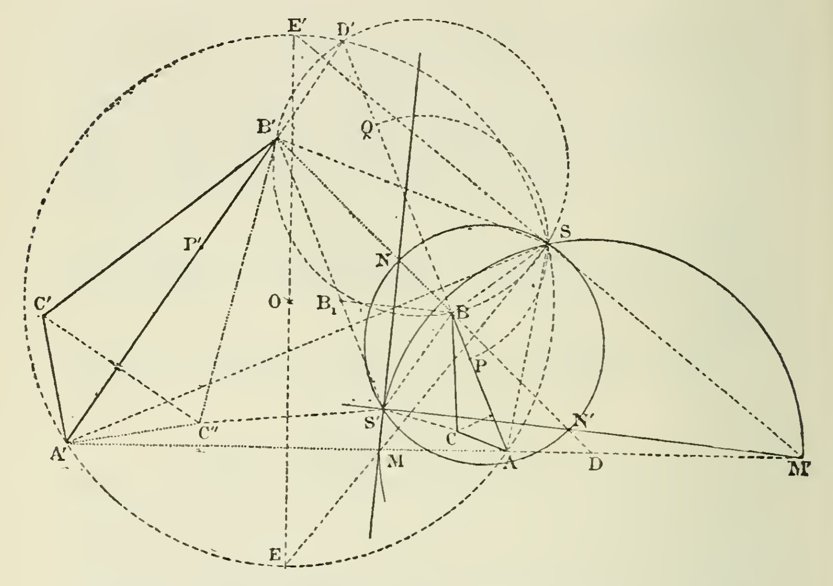
Les cercles analogues PQ, P'Q' passent aussi par S.

Les quatre cercles ci-dessus peuvent être nommés *cercles d'Apollonius* du quadrilatère ABB'A'.

3e moyen. — On peut tracer la droite qui est le lieu des distances proportionnelles aux segments AB' et A'B', ainsi que la droite lieu des points des divisions proportionnelles de ces mêmes segments (les projections de chaque point de cette dernière ligne divisent les segments en parties directement proportionnelles). Chacun de ces lieux passe par S; il en est

de même des lieux analogues pour AA′ et BB′. Voilà donc quatre droites, faciles à tracer, qui passent par le point double S.

4e moyen. — En supposant connu le point demandé, on remarque que le point S est sur la bissectrice EMS de l'angle ASA′; de là, la construction suivante : on décrit le cercle AD′A′,



on divise AA′ en parties proportionnelles aux côtés AB, A′B′, et l'on joint le point milieu E de l'arc AEA′ au point M, afin d'obtenir S.

Ce moyen a été indiqué par M. Tarry. (*Mathesis*, 1895, pp. 79 et 83.)

La bissectrice extérieure passe aussi par S; pour chaque cercle de Miquel, on a deux bissectrices, donc en tout huit bissectrices.

Ainsi *huit cercles et douze droites, faciles à déterminer, passent par le point double de deux figures directement semblables.*

Remarque. — 1° On peut demander le *nombre de constructions distinctes*. Deux lignes, droite ou cercle, suffisent pour déterminer S; mais le tracé de la bissectrice EMS, par exemple,

comporte le tracé du cercle AE'A', il n'y a donc pas lieu de tenir compte de l'intersection de EMS et de l'un quelconque des sept autres cercles, car on aurait construit, en réalité, deux cercles et une droite : ainsi les bissectrices ne donnent que *huit constructions distinctes*.

Quant aux huit cercles et aux quatre autres droites, ils donnent lieu à 66 constructions, donc on peut obtenir le point S par 74 tracés graphiques différents.

2° Pour deux triangles ABC, A'B'C', en prenant chaque groupe de côtés homologues, on aurait:

9 cercles d'Apollonius, 9 cercles de Miquel et 12 lieux rectilignes (non compris 18 bissectrices); en tout :

$$\frac{30 \times 29}{2} + 18 = 453$$

tracés différents, pour obtenir le centre S de similitude.

3° *Figures inversement semblables* ABC, A'B'C''.

Les cercles MM' et NN' donnent le centre S' de similitude inverse.

L'axe de symétrie et la bissectrice des angles tels que BS'B', AS'A' etc.; cet axe est donc facile à déterminer, lorsqu'on connaît S'.

On peut aussi déterminer d'abord l'axe et l'utiliser pour trouver S': il suffit de chercher les points M, N qui divisent AA' ou BB' en parties proportionelles aux côtés homologues AB, A'B'; puis on détermine le point B_1, symétrique de B et l'on mène $B'B_1S'$. Le centre S' est aussi donné par MN et M'N', de même que par le lieu des *distances* et *des divisions proportionnelles.*

4° *Figures égales.* On peut employer la construction de Chasles, ou les précédentes, convenablement simplifiées; ainsi, pour deux figures directement égales, le tracé des bissectrices intérieures, et celui des cercles ayant pour diamètres MN' et NN' reviennent à la *construction de Chasles*, car on obtient les perpendiculaires élevées au milieu de AA' et de BB'.

F. J.

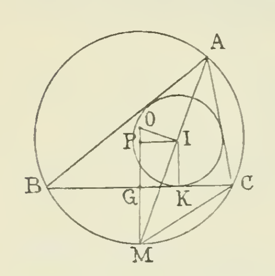
DÉMONSTRATION D'UNE RELATION CONNUE

Par un **Anonyme.**

Soient ABC *un triangle,* O *le centre du cercle circonscrit et* I *le centre du cercle inscrit à ce triangle. La bissectrice de l'angle en* A *coupe, en* M, *le cercle circonscrit ; la projection du centre* I *sur le rayon* OM *est* P ; OM *rencontre* BC *en* G.

Dans le triangle OMI, on a

$$(1)\quad \overline{OI}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MI}^2 - 2OM.PM.$$



Mais $\overline{MI}^2 = \overline{MC}^2 = 2.OM \times MG.$

$2OM.PM = 2OM \times MG + 2OM \times PG,$

donc $\overline{MI}^2 - 2OM \times PM = -2OM \times PG.$

Portant cette valeur dans la relation (1) il vient :

$$\overline{OI}^2 = \overline{OM}^2 - 2.OM \times PG.$$

Le segment OI est la distance des centres O et I, OM est le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et PG = IK est égal au rayon du cercle inscrit à ce même triangle. On a donc ainsi établi la relation connue qui existe entre ces trois éléments.

EXERCICES DIVERS

Par **M. Aug. Boutin.**

402. — *D'un point* M *de la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *on abaisse les perpendiculaires* MA′, MB′, MC′ *sur les côtés, puis l'on porte, sur ces perpendiculaires, dans le sens positif, à partir de leur pied, les longueurs :* $A'A'' = 2R \cos A$, $B'B'' = 2R \cos B$, $C'C'' = 2R \cos C$. *Les trois points* A″, B″, C″, *sont situés sur une même ligne droite, perpendiculaire à la droite de Simson, correspondant au point* M.

A″B″C″ est la droite de Simson de M, dans un triangle symétrique de ABC, par rapport à O

403. — *D'un point* M *du plan d'un triangle* ABC, *on abaisse sur les trois côtés, les perpendiculaires* MA′, MB′, MC′, *et sur ces perpendiculaires, dans un même sens, on porte les longueurs :* $A'A'' = kR \cos A$, $B'B'' = kR \cos B$, $C'C'' = kR \cos C$. *Les points* A″, B″, C″, *sont en ligne droite pour deux valeurs de* k *données par l'équation :*

$$k^2 - 2k + \frac{4S'}{S} = 0.$$

(S′ *étant l'aire du triangle podaire de* M.)

Ces valeurs de k sont les mêmes, quand M décrit une circonférence concentrique à celle qui est circonscrite à ABC.

Ces deux propositions sont susceptibles de la généralisation remarquable, visée dans la proposition suivante :

404. — *D'un point* M *du plan d'un triangle, on abaisse les perpendiculaires* MA′, MB′, MC′, *sur les côtés de ce triangle, et sur ces projetantes, on porte, dans un même sens, c'est-à-dire vers l'intérieur, ou vers l'extérieur, des longueurs :* $A'A_1 = kx_1$, $B'B_1 = ky_1$, $C'C_1 = kz_1$ (x_1, y_1, z_1, *étant les coordonnées normales d'un point* M_1 *du plan du triangle*)*; déterminer* k *de manière que les trois points* A_1, B_1, C_1, *soient en ligne droite.*

L'équation qui détermine k est

$$2k^2 S_{M_1} - k\Sigma x (y_1 \sin C + z_1 \sin B) + 2S_M = 0;$$

x, y, z sont les coordonnées normales de M, S_M, S_{M_1}, les aires des triangles podaires de M et M_1.

On voit qu'il y a, en général, deux valeurs de k qui répondent à la question; ces valeurs déterminent deux droites Δ, Δ′.

On pourra, à ce sujet, démontrer les propositions suivantes :

Δ et Δ′ sont parallèles aux droites de Simson des points où MM_1 *rencontre la circonférence circonscrite à* ABC; *c'est-à-dire que Δ et Δ′ sont parallèles aux asymptotes de la conique, transformée par points inverses de* MM_1.

Pour que Δ et Δ′ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que la droite MM_1 *passe par* O.

Δ et Δ′ sont des droites de Simson de M *par rapport aux triangles homothétiques de* ABC, M_1 *étant centre d'homothétie, et le rapport d'homothétie étant tel que* M *soit un point de la circonférence circonscrite.*

On peut obtenir un grand nombre de cas particuliers remarquables, en choisissant pour M et M_1 des points remarquables. En particulier, nous signalons le cas où M ou M_1 appartiennent à la circonférence circonscrite à ABC.

Le cas suivant paraît seul avoir été remarqué jusqu'ici : M est le point O, et M_1 le point K; Δ et Δ′ sont des droites perpendiculaires entre elles et parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Kiepert (axes de l'ellipse de Steiner); les valeurs de k correspondantes sont celles qui répondent aux angles de Kiepert.

BACCALAURÉATS

Académie de Nancy.

BACCALAURÉAT COMPLET

1° Inscrire un hexagone régulier et un décagone régulier dans un cercle.

2° Calculer les rayons des deux bases d'un tronc de cône sachant que la somme de leurs carrés est a^2 et que le volume du tronc est égal à celui d'un cône ayant même hauteur et un rayon de base égal à R,

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

1° *Questions au choix.* — *(a)* Pour diviser un nombre entier par le produit effectué de plusieurs autres, on peut diviser successivement par chacun d'eux. Démontrer ce théorème dans le cas où les divisions ne se font pas exactement.

(b) Démontrer directement, sans recourir à la décomposition en facteurs premiers, que le plus petit commun multiple de deux nombres est égal au produit de ces deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur. — Trouver le plus petit multiple de trois nombres.

(c) Démontrer que lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs, s'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre, et que lorsqu'un nombre premier divise un produit de plusieurs facteurs, il divise au moins l'un d'eux.

2° *Problème.* — On donne une circonférence de rayon R et un point A extérieur, à la distance $OA = a$ du centre O. De ce point, on mène la sécante ADE faisant l'angle α avec le diamètre ABC. Calculer l'aire du triangle DOE, le rayon de la circonférence circonscrite à ce triangle et le volume qu'il engendre en tournant autour du diamètre BC.

Académie de Poitiers.

Questions au choix. — *(a)* Volume du tronc de pyramide à bases parallèles. Cas des bases triangulaires. Cas des bases quelconques.

(b) Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe situé dans son plan, passant par un sommet et ne coupant pas la surface. Application au volume engendré par un secteur polygonal régulier tournant autour d'un de ses diamètres.

(c) Volume du segment sphérique. — Segment à deux bases. — Segment à une base.

Problème. — Mener une corde DE perpendiculaire au diamètre AB de manière que la somme $2AC + DE$ soit égale à une longueur donnée $2a$. — Traiter la question par l'algèbre et discuter.

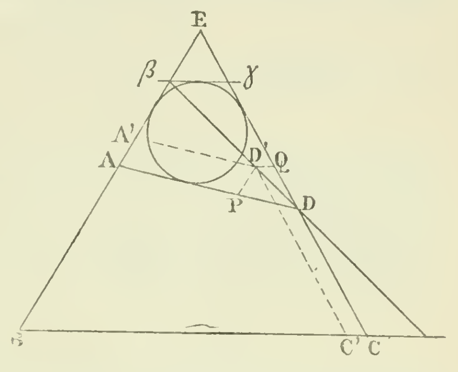
QUESTION 283

Solution et développements par M. SOLLERTINSKY.

Nous allons démontrer que :

Le périmètre et les angles d'un quadrilatère étant donnés, si l'un des angles reste fixe, le sommet de l'angle opposé décrit une droite (à construire).

L'aire du quadrilatère atteint son maximum, quand celui-ci est circonscriptible (*).



Soit E l'intersection de AB, CD; βγ la tangente au cercle inscrit à EAD menée parallèlement à BC : Dβ est la droite cherchée. On a, en effet,

$$BA' + A'D' + D'C' + C'B$$
$$= (BA + D'P) + (AD - PD) + (DC + QD) + (CB - D'Q).$$

Mais, les quadrilatères D'PDQ, βADγ étant homothétiques, on a
$$D'P + QD = PD + D'Q$$

Donc $BA' + A'D' + D'C' + C'B = BA + AD + DC + CB.$

L'aire considérée atteint son maximum, lorsque A'C' devient parallèle à Dβ ; mais alors le quadrilatère correspondant est circonscriptible.

QUESTION 389

Solution par M. H. BROCARD.

Résoudre, en nombres entiers, l'équation

$$\frac{\pi}{4} = 4 \ arc\ tg \frac{1}{q} - arc\ tg \frac{1}{p}. \qquad \text{(Humbert.)}$$

(*) C'est une solution de la question 283 (*J. E.* 1888, p. 144). *Parmi tous les quadrilatères convexes, dont le périmètre et les angles sont donnés, quel est le plus grand en surface?* (Catalan.)

Soit $u = \operatorname{tg} a$. On aura

$$\operatorname{tg} 4a = \frac{4u(1-u^2)}{u^4 - 6u^2 + 1}.$$

donc

$$1 = \frac{\dfrac{4(q^2-1)q}{q^4-6q^2+1} - \dfrac{1}{p}}{1 + \dfrac{1}{p} \cdot \dfrac{4(q^2-1)q}{q^4-6q^2+1}}.$$

On en déduit

$$p = \frac{q^4 - 6q^2 + 1 + 4q^3 - 4q}{4q^3 - 4q - q^4 + 6q^2 - 1}.$$

Il faudrait donc substituer les valeurs 1, 2, 3, ... et voir celles qui donnent pour p des valeurs entières.

La solution $q = \pm 1$, $p = 1$ est immédiate, mais elle est à rejeter. On trouve ensuite $p = 239$ pour $q = 5$. On en conclut la formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

J'ai cherché les substitutions numériques donnant aussi pour p des valeurs entières. J'ignore s'il en existe, n'ayant pas réussi à en obtenir d'autres que celles qui ont été mentionnées ci-dessus.

QUESTION 568 (*)

Résoudre l'équation

$$2(x+\alpha-\beta-\gamma)(x+\beta-\gamma-\alpha)(x+\gamma-\alpha-\beta)$$
$$+(x+\alpha-\beta-\gamma)(\beta-\gamma)^2+(x+\beta-\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha)^2+(x+\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2=0.$$

(G. L.)

Les trois racines sont α, β, γ.

L'identité facile à vérifier,

$$8\alpha\beta\gamma + \alpha(\beta-\gamma)^2 + \beta(\gamma-\alpha)^2 + \gamma(\alpha-\beta)^2 \equiv (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha),$$

donne, par un changement de notation, la suivante

$$2(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) + \Sigma(b+c-a)(b-c)^2 \equiv 2abc.$$

En remplaçant a par $x - \alpha$, etc., on obtient, dans le

(*) Nous n'avons reçu aucune solution de cette question.

premier membre, l'équation proposée. Les racines cherchées sont donc α, β, γ. On trouvera beaucoup d'autres équations, très simples, par cette transformation qu'on pourrait appeler la *transformation d'écriture*.

QUESTION 604

Solution par M. Lecomte, élève au collège Chaptal.

Du point où le cercle inscrit dans abc *donné touche* ab, *on élève une perpendiculaire à ce côté, cette droite est rencontrée en* α *par la perpendiculaire élevée de* a *à* ac *et en* β *par la perpendiculaire élevée de* b *à* bc. *Démontrer que* $a\alpha - b\beta = \alpha\beta$.

(Mannheim.)

Soit O le centre du cercle inscrit.

Dans le triangle βOb, l'angle b est complémentaire de Obc. L'angle βOb est, de même, égal à $\frac{\pi}{2} - Obc$, puisque mOb est rectangle et que bO est bissectrice. Donc $b\beta = O\beta$. De même, dans αaO, on a donc

$$O\beta - O\alpha = a\alpha - b\beta.$$

$$O\alpha = a\alpha.$$

Or $$O\beta = b\beta,$$

donc $O\alpha - O\beta = a\alpha - b\beta$, ou enfin $a\beta = a\alpha - b\beta$

C. Q. F. D.

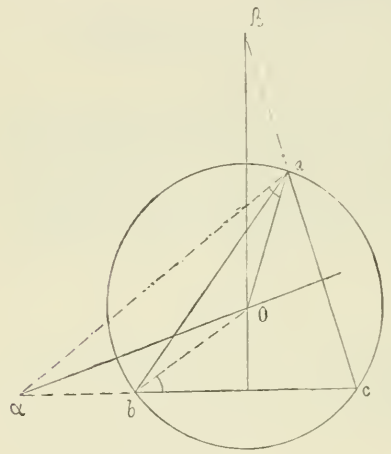
Nota. — Solutions analogues par MM. Angel Bozal-Obejero, professeur à l'Institut libre de Bilbao; G. Daly; A. Droz-Farny; Jean Négretzu; Alfred Champion; A.-C. Davidoglou.

QUESTION 605

Solution par M. Dhavernas, élève au lycée Michelet.

On donne un triangle abc. *La perpendiculaire à* ac *élevée du milieu de ce côté coupe* bc *au point* α. *De même, la perpendiculaire à* bc, *élevée du milieu de ce côté, coupe* ac *au point* β.

Démontrer que a, β, α, b *et le centre du cercle circonscrit à* abc *appartiennent à une même circonférence du cercle.* (Mannheim.)



Tirons $a\alpha$. On a (en désignant par O le centre du cercle *abc*.

$$\widehat{\alpha a O} = \widehat{\alpha ac} - \widehat{Oac} = \widehat{c} - (1^d \widehat{b})$$

d'où

$$\widehat{\alpha a O} = 1^d - \widehat{a} = \widehat{Obc}.$$

Ce qui exprime que α appartient au cercle *ab*O ; on verrait de même que β appartient au même cercle. Ce cercle a d'ailleurs son centre au milieu de la droite qui joint O au pôle de *ab* par rapport au cercle O.

Nota. — Solutions analogues par MM. Jean Négretzu ; Alfred Champion ; A. Droz-Farny ; Davidoglou.

M. Barisien nous a aussi adressé une solution trigonométrique. Il observe que le rayon du cercle en question est égal à $\frac{R}{2 \cos C}$; R désignant, bien entendu, le rayon de la circonférence circonscrite au triangle *abc*.

QUESTION 606

Solution par M. A. Droz-Farny.

Par le milieu O *de la bissectrice intérieure de l'angle* A *d'un triangle* ABC, *on mène une perpendiculaire à cette bissectrice. Cette perpendiculaire rencontre le côté* AB *en* B′ *et le côté* AC

en C′. *Montrer que,* D *étant le point de rencontre des droites* CB *et* C′B :

1° *Le triangle* CBD *et le quadrilatère* AB′DC′ *ont des aires équivalentes;*

2° *La droite* AD *est la symédiane de l'angle* A ;

3° *Si l'on a, entre les côtés du triangle* ABC, *la relation*

$$\overline{BC}^2 = AB.AC,$$

le point D *est son centre des symédianes.* (E.-N. Barisien.)

Prolongeons BA d'une longueur AL = AC et complétons le losange CALE dont les diagonales se croisent en O′. Les diagonales LC et AE sont respectivement parallèles à la bissectrice AA′ et à B′C′. Comme

$$\frac{LO'}{O'C} = \frac{AO}{OA'},$$

les points B, O, O′ sont en ligne droite.

Comme $\frac{AO'}{O'E} = \frac{B'O}{O'C}$, les points B, C′, E sont aussi en ligne droite; d'où une nouvelle construction des points C′ et B′. Il est facile maintenant de calculer la longueur de AC′ : on a

$$\frac{AC'}{LE} = \frac{AB}{BL},$$

d'où

$$AB' = AC' = \frac{bc}{b+c}.$$

1° Le triangle BCE est équivalent à la moitié du losange ACEL donc aussi BCE équivalent à ECC′ + ALC′.

Comme AB′ = AC′ et AC = AL on a :

triangle ALC′ équivalent AB′C.

Il en résulte BCC′ équivalent CB′A

CDC′ = CDC′

par soustraction : triangle BDC équivalent AB′DC′

2° Appliquons le théorème de Ceva aux transversales BC′,

CB′, ADR. Comme AB′ = AC′, on obtient

$$\frac{BR}{RC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{\dfrac{c^2}{b+c}}{\dfrac{b^2}{b+c}} = \frac{c^2}{b^2}.$$

AD est donc la symédiane issue de A.

3° Calculons le rapport $\frac{AD}{DR}$; pour cela, appliquons le théorème de Ménélaüs au triangle ABR coupé par la transversale B′DC.

Il en résulte : $$\frac{AD}{DR} = \frac{AB'.BC}{BB'.RC} = \frac{bc}{c^2}\cdot\frac{a}{\dfrac{ab^2}{b^2+c^2}} = \frac{b^2+c^2}{bc}.$$

Donc $$\frac{AD}{AR} = \frac{b^2+c^2}{b^2+c^2+bc}.$$

K étant le centre des symédianes, on sait que

$$\frac{AK}{AR} = \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Pour que K coïncide avec D il faut donc que $a^2 = bc$.

Remarque. — Si en A′, pied de la bissectrice intérieure, on élève, sur cette dernière, une perpendiculaire, elle rencontrera le côté AC en X; AX sera la *moyenne harmonique* entre les côtés AB et AC.

Nota. — Nous avons reçu des solutions trigonométriques de MM. Dhavernas; A. Champion et Davidoglou.

QUESTION 608

Solution par M. Négretzu.

Montrer que l'élimination du paramètre t *entre les deux équations*

$$a(t^6+1) - 3(x-a)t^3(t^2+1) = 0,$$
$$t^3(x-a) + 3tx - 2y = 0$$

conduit à l'équation

$$4(x^2+y^2) - 5ax + a^2 = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

Remarquons d'abord que la première équation est divisible par $t^2 + 1$ et par suite s'écrit

$$a(t^4 - t^2 + 1) - 3t^2(x - a) = 0,$$

ou

$$a(t^2 + 1)^2 = 3t^2 x,$$

d'où

$$t^2\sqrt{a} - t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0.$$

On est donc conduit à éliminer t entre les équations

(1) $$t^2\sqrt{a} - t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0,$$

(2) $$t^3(x - a) + 3tx - 2y = 0.$$

En multipliant l'équation (1) successivement par t^2 et par t, et l'équation (2) par t, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} t^4\sqrt{a} - t^3\sqrt{3x} + t^2\sqrt{a} = 0. \\ t^3\sqrt{a} - t^2\sqrt{3x} + t\sqrt{a} = 0. \\ t^2\sqrt{a} - t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0. \\ t^4(x - a) + 3t^2x - 2ty = 0. \\ t^3(x - a) + 3tx - 2y = 0. \end{array}\right.$$

Posons (c'est la méthode de M. Sylvester), $t^2 = t'$, $t^3 = t''$ et $t^4 = t'''$; on a alors le système d'équations linéaires, par rapport à t, t', t'', t'''

$$\left\{\begin{array}{l} t'''\sqrt{a} - t''\sqrt{3x} + t'\sqrt{a} = 0. \\ t''\sqrt{a} - t'\sqrt{3x} + t\sqrt{a} = 0. \\ t'\sqrt{a} + t\sqrt{3x} + \sqrt{a} = 0. \\ t'''(x - a) + 3t'x - 2ty = 0. \\ t''(x - a) + 3tx - 2y = 0. \end{array}\right.$$

Exprimons que les équations, qui composent le système ci-dessus, sont compatibles; on a

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{a} & -\sqrt{3x} & \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a} & -\sqrt{3x} & \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a} & -\sqrt{3x} & \sqrt{a} \\ x - a & 0 & 3x & -2y & 0 \\ 0 & x - a & 0 & 3x & -2y \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, ce que l'on peut faire sans difficulté, on trouve la relation cherchée.

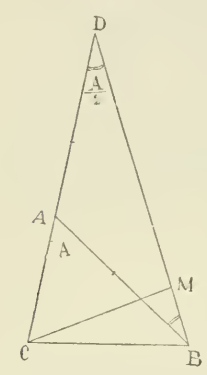
QUESTION 607

Solution, par M. A. Champion.

Démontrer géométriquement que dans tout triangle on a :

$$(b + c)\, sin\, \frac{A}{2} = a\, sin\left(\frac{A}{2} + B\right)$$

(E.-N. Barisien.)



Soit le triangle ABC. Portons, sur AC prolongé, AD = AB.

Traçons BD et menons CM perpendiculaire à BD. On a :

$$CM = CD \sin \widehat{CDM} = BC \sin CBM;$$

d'où

$$(b + c) \sin \frac{A}{2} = a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right)$$

C. Q. F. D.

Nota. — Solutions diverses par MM. Davidoglou; J.-F. Négretzu; Dhavernas; Droz-Farny.

QUESTION 609

Solution par M. Angel Bozal Obejero, professeur à l'Institut libre de Santona (Espagne).

Dans tout triangle, le produit des trois médianes, divisé par le produit des symédianes, a pour expression

$$(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)(a^2 + b^2) : 8a^2b^2c^2.$$

(E.-N. Barisien.)

Pour abréger, nous désignerons, respectivement, par m_a, m_b, m_c et par m'_a, m'_b, m'_c les médianes et les symédianes issues des sommets A, B, C d'un triangle dont les côtés sont a, b, c.

On a :
$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2,$$

et
$$m_a'^2 = \frac{b^2c^2}{(b^2 + c^2)}[2(b^2 + c^2) - a^2] (*).$$

(*) Cette formule est connue; on peut l'établir notamment, comme le faisait M. Davidoglou dans la solution qu'il nous a adressée, en appliquant le théorème de Stewart, théorème très fécond et qui doit être familier aux élèves de mathématiques élémentaires. *G. L.*

Par suite $$\frac{m_a}{m'_a} = \frac{b^2 + c^2}{2bc}.$$

On trouve, par permutation circulaire des lettres, les deux rapports analogues, et en multipliant les trois égalités ainsi obtenues, on a la relation proposée.

Nota. — Solutions diverses par MM. Dhavernas, lycée Michelet; Droz-Farny et Alfred Champion.

M. A. Champion observe que la distance du sommet B au pied de la symédiane, relative au point A, est $a.\frac{c^2}{b^2 + c^2}$. Ce résultat se retient assez facilement en le comparant à la formule $a.\frac{c}{b + c}$ qui fait connaître la distance du point B au pied de la bissectrice intérieure, issue de A.

QUESTION 610

Solution par M. A. Droz-Farny.

Soient AT_1, BT_2, CT_3 *les tangentes en* A, B, C *au cercle circonscrit au triangle* ABC; T_1, T_2, T_3 *étant les points où ces tangentes rencontrent* BC, CA, AB. *On considère ces tangentes comme positives si elles rencontrent les côtés dans les directions* BC, CA, AB; *négatives, si elles les rencontrent dans le sens contraire. Montrer qu'on a toujours*

$$\frac{1}{AT_1} + \frac{1}{BT_2} + \frac{1}{CT_3} = 0.$$

(Tzitzéica.)

Supposons $a < b < c$; AT_1 sera alors positif.

Dans le triangle AT_1C on a

$$\frac{AT_1}{b} = \frac{\sin(A + B)}{\sin(A + 2B)}$$

d'où $$AT_1 = \frac{b \sin C}{\sin(A + 2B)} = \frac{2\Delta \text{ (*)}}{a \sin(A + 2B)},$$

$$\frac{1}{AT_1} = \frac{a \sin(A + 2B)}{2\Delta} = \frac{R \sin A \sin(A + 2B)}{\Delta},$$

$$\sum \frac{1}{T_1} = \frac{R}{\Delta} \sum \sin A \sin(C - B) = 0;$$

(*) Δ désigne ici l'aire du triangle ABC; c'est une convention généralement adoptée dans la géométrie du triangle. *(G. L.)*

car

$$\sum \sin A \sin(B - C) = \begin{vmatrix} \sin A & \sin A & \cos A \\ \sin B & \sin B & \cos B \\ \sin C & \sin C & \cos C \end{vmatrix} = 0.$$

Nota. — Nous avons reçu une autre solution de M. Davidoglou.

M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc, nous fait observer, avec raison, que cette propriété a été énoncée et démontrée (*Journal* 1888, p. 26), dans un article que M. Clément Thiry a consacré (*loc. cit.*) à l'étude des symédianes.

QUESTION 611

Solution et généralisation par M. A Droz-Farny.

On considère le point de Steiner R *et les deux points* ω, ω′ *de Brocard, d'un triangle* ABC ; Rω *rencontre* AC *en* M, Rω′ *rencontre* AB *en* N. *Les droites* Bω *et* Cω′ *se rencontrent sur* MN. (Tzitzéica.)

On sait que le point de Steiner R est le conjugué isogonal du point situé à l'infini sur la droite ωω′. La transformée par points inverses de cette droite sera donc une conique circonscrite au triangle ABC et passant par les points ω, ω′, R.

Pour démontrer le théorème proposé, il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit : BACω′Rω.

On peut remplacer ω et ω′ par deux points quelconques du plan du triangle, et R par un point quelconque de la conique ABCωω′.

QUESTION 612

L'énoncé, comme plusieurs correspondants nous l'ont fait observer, est incorrect, le pied de la hauteur coïncidant avec le pied de la symédiane issue du sommet A du triangle rectangle ABC. Il faut prendre la droite qui va de A au réciproque du point de Lemoine, droite qui va passer par l'isotomique, sur BC, du pied de la hauteur. Alors, la propriété est évidente. *(G. L.)*

QUESTION 613

Solution par M. A. Champion.

On prolonge la diagonale AC = a *d'un rectangle d'une longueur* AE = b, *puis on projette* E *en* F *et* G *sur* AD *et* AB. *Soient* d, d′ *les distances de* A *à* BD, *et* FG *et* δ *la distance des points* M *et* N, *projections du point* A *sur* BF *et* DG.

Montrer que l'aire S *du triangle* AMN *est donnée par*

$$2S = \delta^2 . \frac{d - d'}{a + b}. \qquad \text{(Tzitzéica.)}$$

Achevons le rectangle EGCD. Menons la diagonale KL et les droites AK, AL. Les angles $\widehat{1}, \widehat{2}$ sont respectivement égaux.

Donc les angles KAL, MAN sont égaux,

aire ABFK = AB.AF = FB.AM,

aire ADGL = AD.AG = GD.AN.

Les droites FG et BD étant parallèles, puisque A est sur la diagonale EC, on a

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AF}{AD},$$

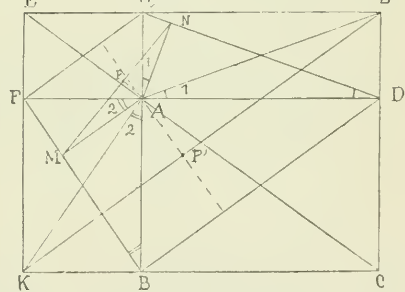
et comme

GD = AL,

FB = AK,

on peut écrire

$$\frac{AK}{AN} = \frac{AL}{AM}.$$



Cette proportion et l'égalité des angles KAL, MAN démontrent la similitude des triangles AKL, AMN. La hauteur de AKL est évidemment $d - d'$, le côté KL = EC = $a + b$.

On a alors, en appelant AP la hauteur de AMN,

$$\frac{AP}{\delta} = \frac{d - d'}{a + b} \quad \text{et, par conséquent,} \quad 2S = \delta^2 . \frac{d - d'}{a + b}.$$

Nota. — Autre solution par M. Davidoglou.

QUESTION 614

Solution par M. A. Champion.

Résoudre les deux équations

$$(1)\qquad (\mathrm{ax})^{\frac{2}{3}} + (\mathrm{by})^{\frac{2}{3}} = (\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)^{\frac{2}{3}},$$

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2} = \left(\frac{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{b}^2}\right)^2.$$

(E.-N. Barisien.)

Posons $(ax)^{\frac{2}{3}} = p, \qquad (by)^{\frac{2}{3}} = q.$

Élevons l'équation (1) au cube, nous avons

$$(p + q)^3 = (a^2 + b^2)^2.$$

L'équation (2) devient successivement :

$$\frac{p^3}{a^4} + \frac{q^3}{b^4} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2},$$

$$(b^4p^3 + a^4q^3)(a^2 + b^2)^2 = a^4b^4(p + q)^3.$$

Pour $q = mp$, on a

$$(b^4 + a^4m^3)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) = a^4b^4(1 + 3m + 3m^2 + m^3)$$

$$a^8m^3 + 2a^6b^2m^3 - 3a^4b^4m^2 - 3a^4b^4m + 2a^2b^6 + b^8 = 0.$$

Cette équation se décompose (*) ainsi :

$$(a^2m - b^2)^2(a^4m + 2a^2b^2m + b^4 + 2a^2b^2) = 0.$$

D'où

$$m' = m'' = \frac{b^2}{a^2}, \qquad m''' = -\frac{b^2(b^2 + 2a^2)}{a^2(a^2 + 2b^2)},$$

et

$$x^2 = \frac{a^4(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^3} \qquad x^2 = \frac{a^4(a^2 + 2b^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^3},$$

$$y^2 = \frac{b^4(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^3} \qquad y^2 = -\frac{b^4(b^2 + 2a^2)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^3}.$$

(*) Détail de la décomposition en facteurs :

$a^8m^3 - a^4b^4m - 2a^4b^4m + 2a^2b^6 + 2a^6b^2m^3 - 2a^4b^4m^2 - a^4b^4m^2 - b^8 = 0,$

$a^4m(a^4m^2 - b^4) - 2a^2b^4(a^2m - b^2) + 2a^4b^2m^2(a^2m - b^2) - b^4(a^4m^2 - b^4 = 0,$

$(a^2m - b^2)(a^6m^2 + a^4b^2m - 2a^2b^4 + 2a^4b^2m^2 - a^2b^4m - b^6) = 0,$

$(a^2m - b^2)^2 [a^2(a^4m^2 - b^4)a + a^2m^2(- b^2) + b^2(a^4m^2 - b^4) + a^2b^2m(a^2m - b^2)] = 0,$

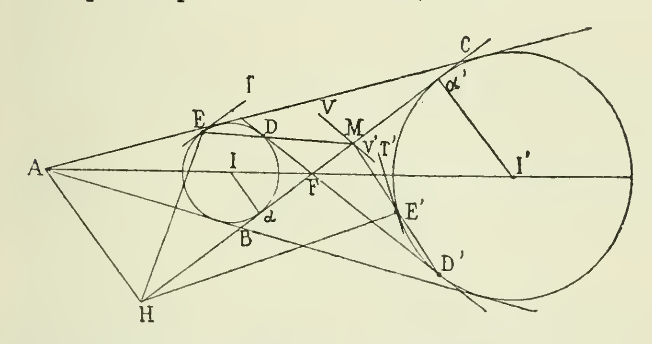
$(a^2m - b^2)^2(a^4m + a^2b^2 + a^2b^2 + a^2b^2m + b^4 + a^2b^2m) = 0.$

QUESTION 615

Solution par M. Davidoglou.

Soient H *le pied de la hauteur* AH *d'un triangle,* E *et* E′ *les points de contact du cercle des neuf points avec le cercle inscrit et le cercle ex-inscrit situé dans l'angle* A; D *et* D′, *les points de contact de la seconde tangente commune intérieure à ces deux cercles; les triangles* DAD′ *et* AEE′ *sont semblables, et la droite* HC *est la bissectrice commune des angles* $\widehat{DHE'}$ *et* $\widehat{EAD'}$. (Vautré.)

La figure et les notations sont celles de la page 83. On a vu *(loc. cit.)* que les quadrilatères FHDE, HFD′E′ sont inscrip-



tibles. Le quadrilatère MDD′H l'est aussi, car

$$FD.FD' = F\alpha.F\alpha' = \overline{M\alpha}^2 - \overline{MF}^2 = MF.HF.$$

Alors: $\widehat{DHD'} = 180^\circ - \widehat{EME'} = \widehat{EHE'}$,... etc.

Puis: $\widehat{MHE'} = \widehat{MD'D} = \widehat{MHD}$; $\widehat{MHE} = \widehat{MHD'}$.

C. Q. F. D.

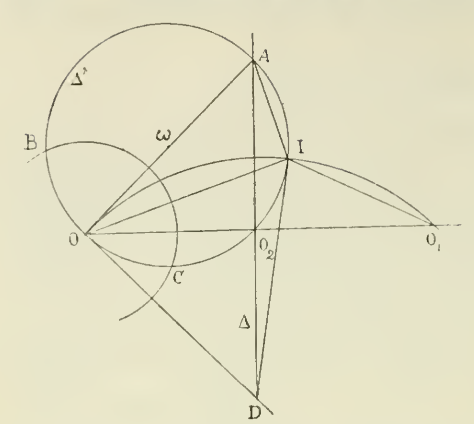
Nota. — Autre solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 617

Solution par M. L'Huillier.

On donne une circonférence de centre O *et une droite* Δ.

D'un point A, *mobile sur* Δ, *on mène les tangentes* AB, AC, *et l'on trace la circonférence* Δ′, *circonscrite à* ABC; *la tangente en* O, *à* Δ′, *coupe* Δ *en un point* D; *de* D, *on peut mener à* Δ′ *une autre tangente* DI. *Quel est le lieu de* I? (G. L.)



Abaissons de O, sur Δ, la perpendiculaire OO_2 et traçons la circonférence de centre D et de rayon DO; elle coupe Δ' en I et OO_2 en O_1, symétrique de O par rapport à Δ.

On a évidemment

$$\widehat{IO_1O} = \widehat{AOI},$$
$$\widehat{IO_2O_1} = \widehat{OAI},$$

donc $\widehat{O_2IO_1}$ est droit, et le lieu cherché est la circonférence ayant O_2O_1 pour diamètre.

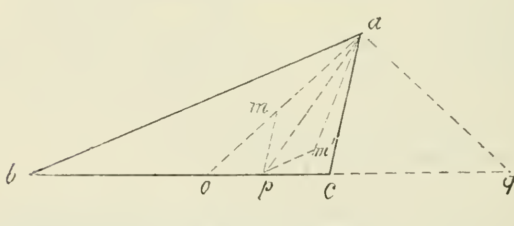
Nota. — Autres solutions par MM. A. Champion et Droz-Farny.

QUESTION 619

Solution par M. Elgé.

On donne un triangle abc. *On mène la bissectrice intérieure de l'angle de ce triangle dont le sommet est* a ; *cette droite coupe* bc *au point* p. *On mene* pm *parallèlement à* ac *et* cm *perpendiculaires à* ap. *Ces deux droites se coupent en* m. *Démontrer que* am *est une médiane du triangle.* (Mannheim.)

Prolongeons *am* qui rencontre *bc* en *o*; il faut montrer que *o* est le milieu de *bc*. Soit *aq* la bissectrice extérieure, *aq* est parallèle à *cm* (*) et les triangles semblables donnent $\frac{om}{oa} = \frac{op}{oc} = \frac{oc}{oq}$.



(*) Cette droite qui passe par *m'*, par oubli, n'a pas été tracée.

On a donc $\overline{oc}^2 = op.oq$; les points b, c; p, q, formant une division harmonique, la relation précédente prouve que o est le milieu de bc.

Nota. — Nous avons reçu diverses solutions de MM. Dhavernas, élève au lycée Michelet; H L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc; A. Champion; Davidoglou; Droz-Farny.

M. Champion ajoute à sa solution une remarque intéressante et facile à vérifier. *Si, par le point* p, *on mène* pm', *parallèlement à* ab, *cette droite coupe* cm *en* m'*;* am' *est la symédiane.*

QUESTION 620

Solution par M. X.

Décrire trois cercles tangents deux à deux en trois points donnés A, B, C, *construire les centres* A', B', C' *de ces trois cercles et calculer leurs rayons en fonction des distances* a, b, c *entre* B *et* C, C *et* A, A *et* B. (E. Lebon.)

En supposant le problème résolu, on voit immédiatement que O est le centre du cercle circonscrit à ABC; A' est l'intersection des perpendiculaires menées, en B, et en C, respectivement à OB et à OC; B' etc... On a donc

$$A'C = \frac{a}{2\cos A} = \frac{abc}{b^2 + c^2 - a^2}, \text{ etc...}$$

Nota. — Solutions analogues par MM. Davidoglou, Droz-Farny, A. Champion.

QUESTIONS PROPOSÉES

668. — On donne sur un plan une circonférence C et un point O. D'un point de cette courbe, comme centre, on décrit une circonférence de cercle qui passe par O et l'on prend l'axe radical de cette courbe et de C. Démontrer que, lorsque le centre pris sur C se déplace sur cette courbe, cet axe radical reste tangent à une circonférence de cercle.

(Mannheim.)

669. — On donne un rectangle ABCD, dans lequel B, D désignent deux sommets opposés. Soient Γ, Γ' deux cercles,

de centres O, O′, tangents entre eux, et touchant respectivement : AB, en B; AD en D.

La droite OO′ enveloppe une circonférence. *(G. L.)*

670. — Un triangle ABC étant donné, on considère dans son plan deux points M, M′, symétriques l'un de l'autre relativement au milieu D de BC. Si BM et CM rencontrent AC, AB en E, F, démontrer que les triangles M′CE, M′FB sont équivalents et présentent le même sens rotatoire.

Appliquer cette proposition à démontrer que, dans un quadrilatère plan quelconque ABCD, convexe ou non, où AD, BC se coupent en L et AC, BD en M, les milieux de AB, CD, LM sont trois points en ligne droite (*). *(Bernès.)*

671. — Dans un triangle ABC on considère deux points M, M′ symétriques l'un de l'autre relativement au milieu de BC, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites AM, AM′ soient isogonales, est que les angles ABM, ACM soient égaux et de sens contraire.

En conclure le lieu des isogonaux N, N′ de deux points M, M′ symétriques relativement au milieu de BC et tels que AM, AM′ soient deux droites isogonales. Quelle est, sur ce lieu, la situation relative de N et N′? Montrer que les deux points M, M′ sont isoptiques (ou jumeaux). *(Bernès.)*

672. — On donne les relations

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)\operatorname{tg}(y+z) = (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} x)\operatorname{tg}(z+x),$$

on demande d'*isoler* les inconnues ; c'est-à-dire de tirer, des relations en question, les suivantes

$$f(x) = f(y) = f(z). \quad (**)$$ *(G. L.)*

(*) On peut aussi l'appliquer à la question suivante.

(**) J'ai proposé cette question dans le journal de M. Schoute, il y a quelques mois. Elle n'a pas été résolue; c'est pour ce motif que je la propose ici, de nouveau.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 16574-8-95.

NOTE SUR L'ÉQUATION TRIGONOMÉTRIQUE $a \sin x + b \cos x = c$.

Par M. **Droz-Farny**, professeur au lycée de Porrentruy.

La résolution de cette équation, lorsque a, b et c sont des valeurs numériques données, est bien connue.

On introduit un angle auxiliaire φ, en posant :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}\cdot$$

Il en résulte

$$\sin(a + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$$

Pour que l'angle X soit réel, on doit avoir

$$1 \geqslant \frac{c}{a}\cos\varphi \geqslant -1, \quad \text{ou} \quad \frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \leqslant 1,$$

d'où

$$c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si a, b, c représentent des longueurs données, il est facile de construire graphiquement les angles x qui vérifient l'équation proposée.

Sur les deux côtés d'un angle droit C, on porte les longueurs $CA = b$ et $CB = a$. L'angle CBA est égal à l'angle auxiliaire φ.

Portons, sur le côté AC, une longueur $AD = c$ et décrivons, du point D comme centre, avec un rayon égal à a, un arc de cercle qui coupe l'hypoténuse AB aux points E et F.

Dans les triangles DEA ou DFA on a :

$$\left.\begin{array}{l}\sin DEA \\ \sin DFA\end{array}\right\} : \sin A = DA : \left\{\begin{array}{l}DE \\ DF\end{array}\right.$$

de là, on tire $\sin DEA = \sin DFA = \dfrac{c\cos\varphi}{a}$.

Les angles DEA et DFA représentent donc les deux valeurs de l'angle $x + \varphi$.

Soient L et M les points d'intersection des droites DF et DE avec le côté BC, on a donc pour l'angle x cherché, les deux solutions :

$$x' = \widehat{BLF} \quad \text{ou} \quad x'' = \widehat{BME}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que l'arc de cercle EF, décrit de D comme centre, avec a pour rayon, coupe, ou, tout au moins, touche, AB.

En abaissant la perpendiculaire DH. sur AB, on doit donc avoir

$$(1) \qquad DH \leqslant a.$$

Les triangles semblables donnent

$$(2) \qquad \frac{DH}{c} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Les relations (1) et (2) prouvent que

$$c \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On retrouve ainsi la condition connue.

Une méthode identique fournirait la construction des angles x vérifiant l'équation

$$a \sin x - b \cos x = c.$$

QUELQUES PROPRIÉTÉS
DU CERCLE CONJUGUÉ A UN TRIANGLE

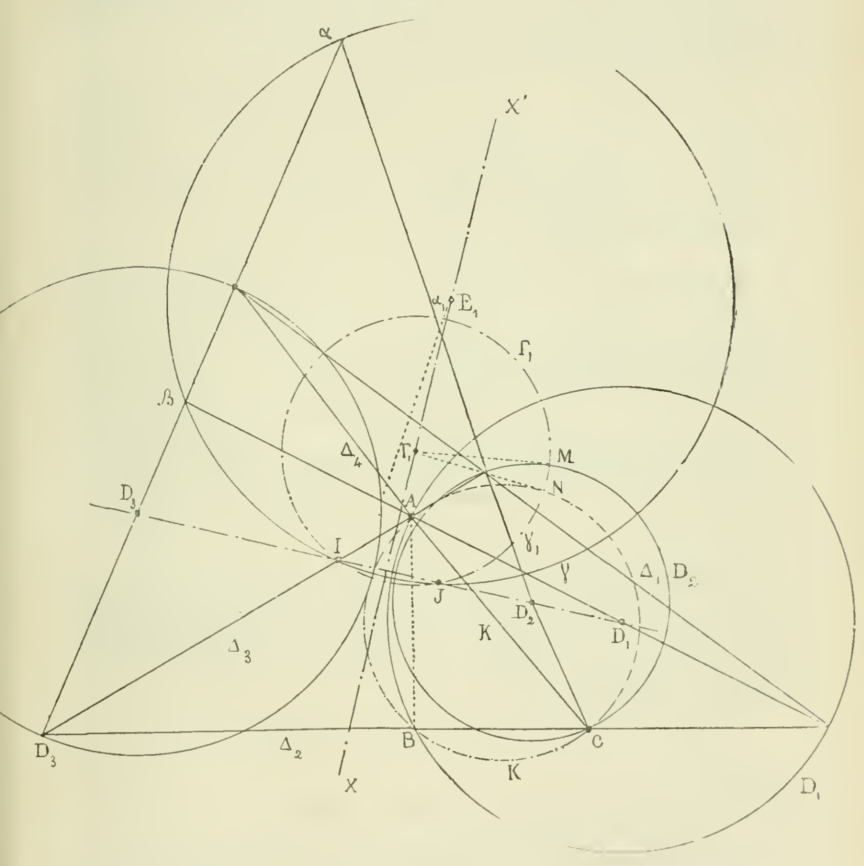
Par **S. Chassiotis.**

I. — On sait que le cercle conjugué à un triangle est tel que la polaire de chaque sommet du triangle, par rapport à ce cercle, est le côté opposé. Il en résulte que le cercle conjugué à un triangle est le cercle orthotomique aux cercles décrits sur les côtés du triangle comme diamètres.

Cela posé, soient quatre droites, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 ; considérons le cercle Γ_1 conjugué au triangle $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$, nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème I. — *Les quatre cercles* Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *sont orthogonaux aux cercles* D_1, D_2, D_3, *décrits sur les diagonales du quadrilatère comme diamètres.*

En effet, le centre de la circonférence Γ_1 est l'orthocentre du triangle $\Delta_2\Delta_3\Delta_4$; son rayon est égal à la puissance de l'orthocentre par rapport aux cercles D_1, D_2, D_3. Or, ce point se trouve sur l'axe radical des circonférences D_1, D_2, D_3 ; on en conclut le théorème énoncé.



Corollaire I. — *Les cercles* Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *ont même axe radical.*

De plus, ils coupent la droite des milieux des diagonales du quadrilatère en deux poiuts I et J qui sont les points limites relatifs aux cercles D_1, D_2, D_3.

Remarque I. — On sait que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite à un triangle appartient au cercle conjugué du triangle; donc, les points I et J sont les centres de deux hyperboles équilatères inscrites dans le quadrilatère $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$. D'autre part, le centre d'une telle hyperbole se trouve à l'intersection de la droite des milieux des diagonales avec le cercle E circonscrit au triangle formé par les diagonales.

Corollaire II. — *Le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles conjugués aux divers triangles formés par les côtés d'un quadrilatère ont même axe radical. Par suite, le cercle circonscrit au triangle des diagonales et les cercles decrits sur les diagonales comme diamètres se coupent à angle droit.*

Remarque II. — Supposons qu'on commence à démontrer directement que le cercle E est orthogonal aux cercles D_1, D_2, D_3 et que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite dans le quadrilatère $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$ se trouve à l'intersection du cercle E avec la droite des milieux des diagonales du quadrilatère. Alors, d'après le théorème I, on en conclut que le centre d'une hyperbole équilatère inscrite dans un triangle se trouve sur le cercle conjugué à ce triangle; ce théorème est bien connu.

Théorème II. — *Les points de l'intersection des cercles* E, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 *avec les diagonales du quadrilotère forment trois divisions en involution. Les points doubles de ces divisions sont les sommets du quadrilatère; les points centraux sont les milieux des diagonales.*

En effet, les cercles E, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 passent par les deux points I et J.

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Théorème III. — *Étant donnés un triangle* ABC *et une transversale* A'B'C' ; *si, sur le côté* AB, *on considère une division en involution, ayant* C' *pour point central et dont la puissance est égale au produit* C'A.C'B; *et, sur les autres côtés, les divisions analogues ; les points doubles de ces divisions sont, trois à trois, en ligne droite.*

Ainsi, les six points doubles sont situés sur quatre droites qui forment un quadrilatère complet.

Considérons maintenant, dans un triangle ABC, *deux transversales réciproques* A′B′C′ et A″B″C″ et appliquons successivement à chacune des transversales le théorème III. A chacune des deux transversales considérées correspond un quadrilatère, les deux quadrilatères ainsi obtenus sont *réciproques*, c'est-à-dire que deux côtés homologues sont des transversales réciproques.

Remarque III. — Considérons maintenant deux quadrilatères réciproques; avec leurs huit côtés, on peut former 56 triangles et, par suite, on peut leur construire 56 cercles conjugués; or, avec ces 8 côtés on peut former 70 quadrilatères, d'après le corollaire I du théorème I, ces 56 cercles ont même axe radical 4 à 4. Nous avons donc 70 axes radicaux distincts qui coupent les 56 cercles en 140 points situés sur une même circonférence qui, d'après le corollaire II du théorème I, est la circonférence circonscrite au triangle par rapport auquel les quadrilatères sont réciproques.

Cette remarque peut se généraliser bien facilement, et conduit aux théorèmes suivants :

Théorème IV. — *Étant donnés un triangle* αβγ *fixe, et une transversale* A′B′C′, *variable dans son plan; on considère les six points qui, d'après le théorème III, lui correspondent. Avec* A′ *comme centre et un rayon égal à* $\sqrt{A'B . A'C}$, *on décrit une circonférence; les trois circonférences ainsi obtenues ont même axe radical; cet axe passe par un point fixe lorsque la transversale* A′B′C′ *varie*, ce point fixe étant le centre du cercle circonscrit au triangle αβγ.

Théorème V. — *Le lieu des points* (I *et* J), *points limites relatifs aux cercles* D_1, D_2, D_3, *est la circonférence circonscrite au triangle* αβγ.

Des théorèmes précédents résulte encore l'énoncé suivant :

Théorème VI. — *Étant donné un triangle* ABC, *il existe trois hyperboles équilatères ayant un de leurs foyers au centre des hauteurs et tangentes à deux côtés du triangle. Elles sont les polaires*

réciproques des cercles décrits sur les côtés du triangle ABC *comme diamètres, par rapport au cercle conjugué.*

Théorème VII. — *Les directrices relatives au foyer commun sont les perpendiculaires abaissées des points* A, B, C, *sur les droites joignant le foyer commun aux milieux des côtés.*

Théorème VIII. — *Les asymptotes de ces hyperboles sont les tangentes menées, des milieux des côtés, au cercle conjugué.*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

405. — *On considère la suite*

$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 6, \quad u_3 = 35 \quad \ldots \quad u_n = 6u_{n-1} - u_{n-2}.$

Aucun nombre de cette suite n'est premier.

Les termes de rang pair sont pairs; les termes de rang impair satisfont à la relation :

$$u_{2n+1} = u_{n+1}^2 - u_n^2.$$

En outre du facteur 2, les termes de rang pair sont décomposables par la formule :

$$u_{2n} = 2u_n(3u_n - u_{n-1}).$$

On en déduit, pour la somme des termes de rang impair :

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = u_{n+1}^2$$

et, pour celle des termes de rang pair :

$$u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_n u_{n+1}.$$

On peut encore vérifier les formules :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = \frac{1}{32}(u_{2n+1} - 2n - 1),$$

$$u_1^2 + u_3^2 + u_5^2 + \ldots + u_{2n-1}^2 = \frac{1}{16}\left(\frac{u_{4n}}{12} - n\right),$$

$$\frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + \frac{1}{u_3u_4} + \ldots + \frac{1}{u_nu_{n+1}} = 6 - \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}.$$

Cette suite remarquable est telle que le carré de chacun de ses termes est un triangulaire. S'il existe des triangulaires autres que 0, 1 et 6, dont le carré soit un triangulaire, ils sont donc compris dans cette suite (question 164 de *l'Intermédiaire*). Les seuls nombres u_n, qui puissent être triangulaires, sont ceux où n affecte l'une des formes : $6K$, $12K + 1$, $12K + 2$.

On vérifie directement qu'il n'y en a pas jusqu'à :

$$u_{24} = 417\,501\,372\,047\,787\,720.$$

406. — *A un carré on ajoute le triangulaire de même rang. Dans quel cas la somme est-elle un carré?*

On doit résoudre, en nombres entiers, l'équation :

$$x^2 + \frac{x(x+1)}{2} = y^2.$$

On a toutes les solutions par les suites :

$$y_1 = 10, \quad y_2 = 980, \quad y_3 = 96030 \quad \ldots \quad y_n = 98y_{n-1} - y_{n-2};$$
$$x_1 = 8, \quad x_2 = 800, \quad x_3 = 78406 \quad \ldots \quad x_n = 98x_{n-1} - x_{n-2} + 16.$$

407. — *Quels sont les triangulaires qui ne diffèrent d'un cube que d'une unité?*

On sait qu'aucun triangulaire n'est un cube.

Les triangulaires qui répondent à la question sont les solutions de

$$y^3 \pm 1 = \frac{x(x+1)}{2}.$$

On trouve :

$$1^3 - 1 = 0,$$
$$3^3 + 1 = \frac{7 \cdot 8}{2},$$
$$16^3 - 1 = \frac{90 \cdot 91}{2},$$
$$20^3 + 1 = \frac{126 \cdot 127}{2}.$$

Ce sont d'ailleurs les seules solutions.

408. — *Tout carré impair, augmenté de 2, est, de deux façons au moins, une somme de trois carrés.*

En dehors de la décomposition :

$$(2n+1)^2 + 2 = (2n+1)^2 + 1^2 + 1^2,$$

on a, n étant un multiple de 3, ou un multiple de 3 augmenté ou diminué d'une unité :

$$(6p+3)^2 + 2 = (4p+3)^2 + (4p+1)^2 + (2p+1)^2,$$
$$(6p \pm 1)^2 + 2 = (4p \pm 1)^2 + (4p \pm 1)^2 + (2p \mp 1)^2.$$

BACCALAURÉATS

Académie de Rennes.

Questions au choix. — (*a*) Établir le théorème des projections et en déduire la démonstration générale des formules qui font connaître $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$, $\cos b$.

(*b*) Trouver la limite du rapport $\frac{\sin x}{x}$, lorsque x tend vers zéro, en démontrant les principes sur lesquels on s'appuie.

(c) Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Discussion. — Comparaison des solutions géométriques et trigonométriques.

Problème. — On donne une circonférence O de rayon R et un point A situé à la distance $OA = a$ du centre O. Par le point A, on mène une sécante ACB telle que AC soit le plus grand segment de AB partagé en moyenne et extrême raison. Trouver, en fonction de R et de a :

1° Les expressions de AB, AC et des projections des rayons OB, OC sur OA ;

2° Le volume engendré par le secteur circulaire BOC, tournant autour de OA;

3° Ce que devient le volume quand on suppose :

$$a = R(2 + \sqrt{5}).$$

Académie de Toulouse.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Vérifier l'identité $\cos x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \dfrac{x}{2}}$.

II. Calculer les sinus et les cosinus des arcs $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

III. Étant donné le côté a d'un triangle équilatéral ABC, on inscrit dans ce triangle un second triangle équilatéral DEF. Déterminer la distance AD de telle façon que le rapport de l'aire du triangle DEF à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné m^2.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

On donne la base AC, que l'on désignera par a, et la hauteur correspondante h d'un triangle ABC. Calculer les côtés d'un rectangle DEFG inscrit dans ce triangle, sachant qu'une diagonale de ce rectangle a une longueur donnée m. — Discuter.

QUESTION 618

Solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

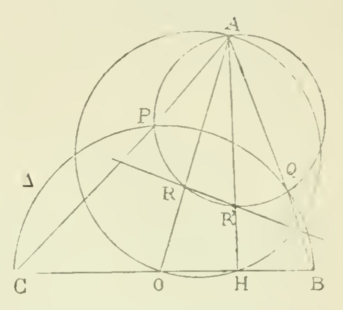
On considère un triangle ABC. *Sur* BC *comme diamètre on décrit un cercle* Δ *qui coupe* AB *en* P, AC *en* Q. *La polaire de* A *par rapport à* Δ *coupe le cercle* APQ *en deux points* R *et* R'. *L'une des droites* AR, AR' *est la hauteur correspondant à* BC*; l'autre est la médiane.* (G. L.)

Le cercle circonscrit au triangle APQ est le cercle décrit sur AR' comme diamètre, R' étant le point de rencontre des

hauteurs BP et CQ. La polaire de A passe par le point R′ et AR′ est la troisième hauteur du triangle.

Soit R le second point d'intersection de la polaire de A avec le cercle APQ, AR est perpendiculaire à RR′ et par suite passe par le centre O de Δ, point milieu de BC.

(Autrement) (*). — Transformons la figure, en prenant A pour centre d'inversion et AP.AC = AQ.AB pour module. Le cercle Δ est sa propre transformée. Le cercle APQ devient la droite BC, et la polaire de A, par rapport à Δ, est le cercle ayant pour diamètre la droite joignant A au centre de Δ, c'est-à-dire au milieu de BC. Ainsi, les transformés des points R et R′ sont : le milieu de BC et le pied de la hauteur H, issue de A. Les points R et R′ sont donc bien situés : l'un, sur la médiane; l'autre, sur la hauteur.



Nota. — Solutions diverses par MM. Alfred CHAMPION, DROZ-FARNY, DAVIDOGLOU.

QUESTION 621

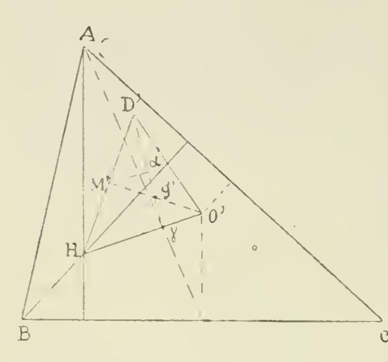
Solution, par M. DROZ-FARNY, professeur au lycée de Porrentruy.

On donne un tétraèdre quelconque. De l'un de ses sommets, on mène le plan perpendiculaire à la face opposée à ce sommet, et qui contient le point de rencontre des hauteurs du triangle formant cette face. Il y a ainsi quatre plans : démontrer qu'ils se coupent au même point. (Mannheim.)

Soient, dans un triangle ABC quelconque, H l'orthocentre, γ le centre de gravité, O′ le centre du cercle circonscrit. D'après un théorème bien connu, dû à Euler, ces trois points sont en ligne droite, et $H\gamma = 2\gamma O'$. Joignons un point quel-

(*) Cette solution est de M. DHAVERNAS, élève au lycée Michelet.

conque D′ du triangle à ces trois points, et soient M′ le point milieu de HD′ et G′ le point qui divise $\gamma D'$ suivant le rapport $\gamma g' : g'D' = 1 : 3$.



On voit aisément que O′, G′ et M′ sont en ligne droite, et que G′ est le point milieu de M′O′. Soit, en effet, α le point milieu de $\gamma D'$; $M'\alpha$ sera égal et parallèle à $\gamma O'$, donc $M'\gamma O'\alpha$ étant un parallélogramme, la diagonale M′O′ est divisée en G′ en parties égales. Considérons maintenant le tétraèdre ABCD, D′ étant la projection du sommet D sur la base ABC. Il en résulte que O′ et G′ seront, sur la même base, les projections du centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre et du centre de gravité G de ce tétraèdre. Si donc on élève, en M′, une perpendiculaire sur la face, elle coupera la droite fixe OG en un point bien déterminé M, appartenant au plan DD′H, et, par conséquent, aux quatre plans analogues, et tel que $MG = GO$.

Remarque. — M est le centre de l'hyperboloïde des quatre hauteurs du tétraèdre; il résulte en outre de la démonstration précédente, ce théorème dû à Joachimsthal :

Dans tout tétraèdre, le centre M *de l'hyperboloïde des hauteurs, le centre de gravité* G *et le centre* O *de la sphère circonscrite, sont trois points en ligne droite et tels que* $MG = GO$.

QUESTION 622

Solution par M. J. S. Mackay, professeur à l'Université d'Edimbourg.

Soient B_1 *et* C_1 *les milieux des côtés* AC *et* AB *du triangle* ABC, P *un point quelconque du côté* BC. *Les droites* PB_1 *et* PC_1 *coupent respectivement* AB *et* AC *en* B_2 *et* C_2. *Démontrer que la droite* B_2C_2 *est parallèle à* AP *et qu'elle coupe le côté* BC *en un point* Q *tel que*

$$\frac{QC}{QB} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2.$$

(M. d'Ocagne.)

Les côtés du triangle ABC, coupés par les transversales PB_1B_2, PC_2C_1, donnent

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{CB_1}{AB_1}\cdot\frac{AB_2}{BB_2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{BP}{CP}\cdot\frac{CC_2}{AC_2}\cdot\frac{AC_1}{BC_1} = 1\,;$$

d'où

$$\frac{BP}{CP}\cdot\frac{AB_2}{BB_2} = -1 \quad \text{et} \quad \frac{BP}{CP}\cdot\frac{CC_2}{AC_2} = -1, \qquad (a)$$

d'où

$$\frac{AB_2}{BB_2} = \frac{CC_2}{AC_2}$$

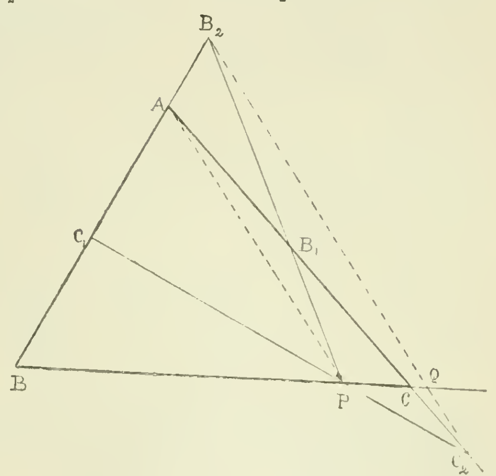
De là, on tire

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{CC_2}{AC},$$

et

$$\frac{AB_2}{AC_1} = \frac{CC_2}{CB_1} = \frac{PC_2}{PC_1},$$

à cause des parallèles C_1B_1 et BC. Ainsi B_2C_2 est parallèle à AP.



Les côtés du triangle ABC, coupés par la transversale QC_2B_2, donnent

$$\frac{BQ}{CQ}\cdot\frac{CC_2}{AC_2}\cdot\frac{AB_2}{BB_2} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{AC_2}{CC_2}\cdot\frac{BB_2}{AB_2}.$$

Mais il résulte de (a) que

$$\left(\frac{BP}{CP}\right)^2 = \frac{BB_2}{AB_2}\cdot\frac{AC_2}{CC_2},$$

donc, enfin, etc.

Nota. — Autres solutions par MM. A. Champion, Droz-Farny, Davidoglou, H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 623

Solution par M. A. Champion.

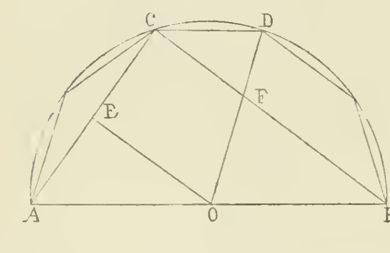
Démontrer que l'apothème du pentagone régulier est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit augmenté de la moitié du côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle. (Mannheim.)

Les triangles OBF, CDF, évidemment isoscèles, donnent :

$$OB = BF,$$
$$CD = CF.$$

Mais $$OE = \frac{CB}{2} = \frac{OB + CD}{2}.$$

Solution analytique (*). — Le côté du pentagone inscrit dans un cercle de rayon R ayant pour valeur



$$P = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

on aura pour son apothème :

$$A^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(10 - 2\sqrt{5}),$$
$$= \frac{R^2}{16}(6 + 2\sqrt{5}),$$

d'où
$$A = \frac{R}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1),$$
$$A = \frac{R}{4}(\sqrt{5} - 1) + \frac{R}{2}.$$

Or, le côté du décagone régulier, inscrit dans un cercle de rayon R est $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$; donc, etc...

Nota. — Solutions diverses par M. Jean Négrétzu, à Dobridor (Roumanie); L. Goyens; Bozal-Obejero, professeur à l'institut de Bilbao (Espagne); H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 624

Généralisation par M. A. Droz-Farny.

1° *Dans un triangle* ABC, *trouver le point* M *pour lequel on a*
$$\overline{AM}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{AB}^2.$$

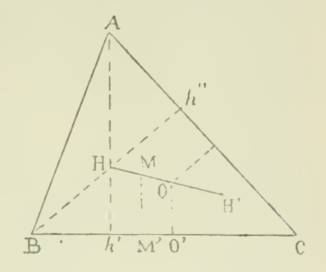
2° *Dans un triangle* ABC *trouver le point* M *pour lequel on a*
$$\overline{AM}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{BM}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 - \overline{AB}^2.$$

(E. Lemoine.)

(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

D'après une question proposée par M. E. Lemoine dans *Mathesis*, cherchons le point M pour lequel

$\overline{MA}^2+\lambda a^2=\overline{MB}^2+\lambda b^2=\overline{MC}^2+\lambda c^2.$



Supposons $b > c$, on a

$$\overline{MC}^2 - \overline{MB}^2 = \lambda(b^2 - c^2).$$

Si, de M, on abaisse la perpendiculaire MM' sur BC, on aura aussi $\overline{M'C}^2 - \overline{M'B}^2 = \lambda(b^2 - c^2)$. Représentons par H' le pied de la hauteur relative à BC et par O' le point milieu de ce côté. Comme $(M'C + M'B)(M'C - M'B) = \lambda(b^2 - c^2)$, on trouve $M'C = \dfrac{\lambda(b^2 - c^2) + a^2}{2a}$, $M'B = \dfrac{a^2 - \lambda(b^2 - c^2)}{2a}$, d'où aisément $M'O' = \dfrac{\lambda(b^2 - c^2)}{2a}$, $M'H' = \dfrac{(b^2 - c^2)(1 - \lambda)}{2a}$, et, par conséquent, $\dfrac{M'O'}{M'H'} = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda}$, rapport qui ne dépend que de λ.

La perpendiculaire élevée en M', sur BC, couperait donc la droite d'Euler OH en un point M, bien déterminé, pour lequel $\dfrac{MO}{MH} = \dfrac{\lambda}{1 - \lambda}$. La position de ce point ne dépendant que de la valeur de λ, on trouverait le même résultat pour les deux autres côtés. M est donc un point de la droite d'Euler du triangle ABC.

Si le point M avait été déterminé par les conditions

$$\overline{MA}^2 - \lambda a^2 = \overline{MB}^2 - \lambda b^2 = \overline{MC}^2 - \lambda c^2,$$

on aurait eu, pour sa projection M'' sur BC

$$\overline{M''B}^2 - \overline{M''C}^2 = \lambda(b^2 - c^2):$$

d'où
$$\overline{M''B}^2 - \overline{M''C}^2 = \overline{M'C}^2 - \overline{M'B}^2.$$

Il en résulte évidemment que les points M' et M'' sont isotomiques sur BC et que, par conséquent, les deux points M cherchés sont sur la droite d'Euler, symétriquement disposés par rapport à O.

Dans le cas particulier de la question proposée, $\lambda = 1$ le premier point coïncide avec l'orthocentre H ; le second, est le symétrique H', de H, par rapport à O.

Nota. — Solutions diverses par MM. Goyens et Davidoglou.

M. Lemoine, en nous adressant cette question, ajoutait quelques réflexions; parmi lesquelles, les suivantes :

1° Au point H, la valeur commune des quantités $\overline{AH}^2 + a^2$, $\overline{BH}^2 + b^2$, $\overline{CH}^2 + c^2$, est égale à $4R^2$.

2° Au point H′, on a

$$\overline{AH'}^2 - a^2 = \overline{BH'}^2 - b^2 = \overline{CH'}^2 - c^2 = 16R^2 - 4(p^2 - 4Rr - r^2)$$

(notations ordinaires).

3° Le point H′ a pour coordonnées normales $\cos A - \cos B \cos C, \ldots$ Ce point est, après le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre, un des points remarquables du triangle qui se place le plus simplement; si l'on s'appuie sur sa propriété d'être le centre radical des trois circonférences $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ étudiées par M. de Longchamps, on voit que le symbole de sa construction est *op*: $(4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 3C_3)$; *simplicité:* 18; *exactitude:* 13; 2 droites, 3 cercles.

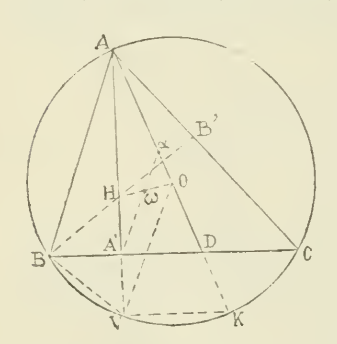
QUESTION 625

Solution par M. Goyens.

Soient H *l'orthocentre d'un triangle* ABC, O *le centre du cercle circonscrit; les droites* AH *et* AO *coupent le côté* BC *respectivement aux points* A′, D; *soit* α *le point milieu de* AD. *Les trois droites telles que* A′α *se croisent au centre* ω *du cercle des neuf points.*

(Droz-Farny.)

Le centre du cercle des neuf points est au milieu de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit. Il suffit donc de démontrer que ω est le milieu de OH. Dans le triangle rectangle AA′D, A′α = Aα; donc l'angle HA′α = αAA′. Dans le triangle rectangle AVK, VO = AO; donc l'angle A′VO = HA′α; donc A′α et VO sont parallèles.



Les égalités

$$\widehat{HBA'} = \widehat{A'AC} = \widehat{A'BV}$$

prouvent que $HA' = A'V$; A′ étant le milieu de HV dans le triangle HVO; A′α, parallèle à OV, passe par le milieu de HO.

Nota. — Solutions diverses par MM. A. Champion; H. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc; Davidoglou.

QUESTION 626

Solution par M. L'Huillier.

On considère le faisceau $O(AA_1A_2A_3 \ldots A_{2p}B)$ *et la transversale* $AA_1A_2 \ldots A_{2p}B$. *Si l'on désigne par* $R_1, R_2, \ldots R_{2p}$, *les rayons des* (A_{2p}) *cercles circonscrits, aux triangles* $OAA_1 OAA_2 \ldots OAA_{2p}$ *et par* $R'_1, R'_2, \ldots R'_{2p}$ *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* OBA_1, $OBA_2 \ldots OBA_{2p}$, *on a la relation*

$$\frac{R_2 \ldots R_{2p}}{R_1 \ldots R_{2p-1}} = \frac{R'_2 \ldots R'_{2p}}{R'_1 \ldots R'_{2p-1}}. \quad (*)$$

(J. Négrétzu.)

Le produit de deux côtés d'un triangle étant égal au diamètre multiplié par la hauteur correspondante au troisième côté, on aura en désignant par h cette dernière

$$OA.OA_1 = 2R_1.h,$$
$$OA.OA_2 = 2R_2.h,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$OA.OA_{2p} = 2R_{2p}.h;$$

et

$$OB.OA_1 = 2R'_1.h,$$
$$OB.OA_2 = 2R'_2.h,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$OB.OA_{2p} = 2R'_{2p}.h;$$

d'où

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{OA_2}{OA_1}, \quad \ldots \quad \frac{R_{2p}}{R_{2p-1}} = \frac{OA_{2p}}{OA_{2p-1}};$$
$$\frac{R'_2}{R'_1} = \frac{OA_2}{OA_1}, \quad \ldots \quad \frac{R'_{2p}}{R'_{2p-1}} = \frac{OA_{2p}}{OA_{2p-1}};$$

et, par suite,

$$\frac{R_2 \ldots R_{2p}}{R_1 \ldots R_{2p-1}} = \frac{R'_2 \ldots R'_{2p}}{R'_1 \ldots R'_{2p-1}}.$$

Nota. — Solutions analogues par MM. A. Champion et Davidoglou.

(*) Énoncé rectifié.

QUESTION 627

Solution, par M. J.-S. Mackay, professeur à l'Université d'Édinbourg.

Soient :

I, I_1, I_2, I_3 *le cercle inscrit et les cercles exinscrits à un triangle* ABC,

C_0	*le centre radical des cercles*	I_1, I_2, I_3
C_1	*id.*	I, I_3, I_2
C_2	*id.*	I_3, I, I_1
C_3	*id.*	$I_2, I_1, I.$

Montrer que :

1° *Le triangle* $C_1 C_2 C_3$ *est semblable au triangle formé par les centres des cercles* I_1, I_2, I_3 *et le rapport de similitude de ces triangles est* $\frac{1}{2}$:

2° *Le point* C_0 *est le point de rencontre des hauteurs du triangle* C_1, C_2, C_3. (E.-N. Barisien.)

Employons les notations suivantes :

I, I_1, I_2, I_3 désigneront aussi les centres des cercles inscrit et exinscrits,

D, D_1, D_2, D_3, les points de contact de ces cercles avec BC,

A', B', C', les points milieux de BC, CA, AB.

On sait que A' est le point milieu de D_2D_3, aussi bien que celui de DD_1. On aura donc l'axe radical des cercles I_2, I_3 passant par A' et perpendiculaire à leur ligne de centres I_2I_3.

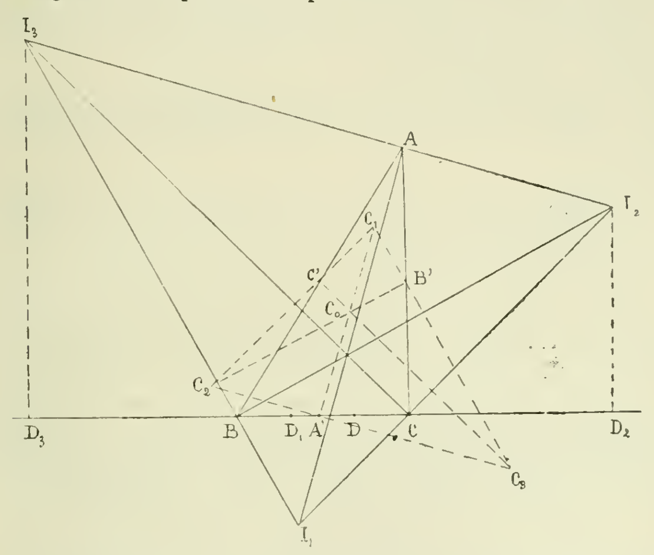
Mais l'axe radical des cercles I, I_1 passe aussi par A', et il est perpendiculaire à II_1. Par conséquent, les axes radicaux des couples de cercles I_2 et I_3 se coupent perpendiculairement en A'.

De même pour les axes radicaux des cercles I_3 et I_1, I et I_2 ; et pour ceux de I_1 et I_2, I et I_3.

Maintenant, puisque les axes radicaux de trois cercles se coupent au centre radical, on voit que les quatre centres radicaux C_0, C_1, C_2, C_3 forment un *groupe orthocentrique*, c'est-à-

dire, que. dans le groupe, *chaque point est l'orthocentre du triangle dont les trois autres sont les sommets.*

Les deux quadrangles $II_1I_2I_3$ et $C_0C_1C_2C_3$ ont évidemment leurs lignes correspondantes parallèles.



Le triangle ABC et le triangle $C_1C_2C_3$ ont même cercle des neuf points, parce que A', B', C', qui sont les points milieux des côtés de ABC, sont les pieds des hauteurs de $C_1C_2C_3$. Le rayon de ce cercle est la moitié du rayon R du cercle ABC, et le cercle ABC est le cercle des neuf points du triangle $I_1I_2I_3$; ce qui établit le rapport de similitude des triangles $C_1C_2C_3$ et $I_1I_2I_3$.

Remarque. — On peut signaler quelques autres propriétés appartenant à cette figure.

Si l'on désigne par H l'orthocentre du triangle ABC, on sait que le cercle des neuf points de ABC touche les seize cercles inscrits et exinscrits aux quatre triangles ABC, HCB, CHA, BAH. Or, ce même cercle doit toucher aussi les seize cercles fournis par les triangles $C_1C_2C_3$, $C_0C_3C_2$, $C_3C_0C_1$, $C_2C_1C_0$.

Si l'on effectue les mêmes constructions sur le triangle $C_1C_2C_3$ comme on a fait sur le triangle ABC, on aura une

autre série de seize cercles touchés par le même cercle des neuf points; et ainsi de suite.

On trouvera que les triangles $C_1C_2C_3$..... successivement obtenus approchent de plus en plus d'un triangle équilatéral; par conséquent, le cercle des neuf points de ABC sera non seulement le cercle des neuf points du triangle limite, mais aussi son cercle inscrit.

La question a été traitée dans le *Lady's and Gentleman's Diary* (pour 1857, p. 87), recueil peu connu, même en Angleterre.

La première propriété de la question est un cas particulier d'un théorème plus général, énoncé dans les *Annales* de Gergonne, tome II, p. 93 (1811) :

« *Si, à un triangle quelconque* T, *on en circonscrit un autre, quelconque, lui aussi,* T'; *qu'à celui-ci, on en circonscrive un troisième* T'', *ayant ses côtés respectivement parallèles à ceux de* T; *puis, qu'on circonscrive à* T'' *un nouveau triangle* T''', *dont les côtés soient respectivement parallèles à ceux de* T', *et ainsi de suite, les aires des triangles* T, T', T'', T''',... *lesquels seront semblables de deux en deux, formeront une progression par quotient.* »

On trouvera une démonstration de ce théorème par M. Léon Anne dans les *Nouvelles Annales*, tome III, p. 27 (1844).

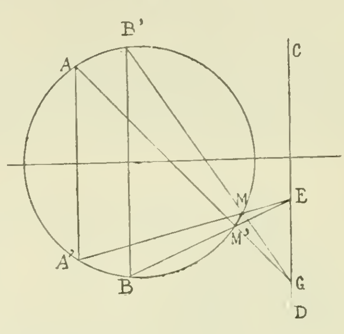
Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc et Davidoglou.

QUESTION 628

Solution par A. Droz-Farny.

On donne, sur une circonférence : 1° deux points A, B *et leurs symétriques* A', B' *par rapport à un diamètre; 2° une droite* CD *perpendiculaire à ce diamètre. On joint* A *et* B *à un point quelconque* M' *de la circonférence;* BM' *rencontre* CD *en* E ; AM *rencontre* CD *en* G. *Démontrer que les droites* B'G, A'E *se coupent sur la circonférence.* (Alfred Champion.)

B′G et A′E se coupent en M ; considérons l'hexagone AA′MB′BM′ dont les paires de côtés opposés se coupent AA′ et BB′ suivant le point infini de CD ; A′M et BM′ en E ; MB′ et M′H en G. Ces points d'intersection étant en ligne droite, les six sommets de l'hexagone appartiennent à une même conique bien définie par les cinq points A, B, A′, B′, M′.



Remarque. — On peut remplacer la circonférence par une conique quelconque, AA′, BB′, CD par trois cordes parallèles ou par trois droites concourantes.

Autrement (*). — B′G coupe la circonférence en M. Tirons A′M ; elle coupe BM′ en un point E′ ; nous allons montrer que E′ se confond avec E. Le quadrilatère GM′ME′ est évidemment inscriptible. Alors $\widehat{EGE'} = \widehat{MGE} - \widehat{MGE'}$ $= \widehat{MGE} - \widehat{MM'E'} = \widehat{MGE} - \widehat{BB'M} = \widehat{MGE} - \widehat{MGE}$.

Ainsi GE′ se confond avec GE, etc.

QUESTION 629

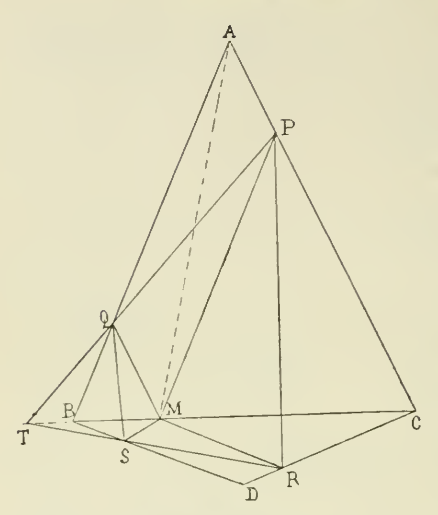
Solution, par M. Davidoglou.

Soit BAC *un triangle isoscèle* (AB = AC) *; aux points* B *et* C *on élève aux côtés* BA, CA, *des perpendiculaires qui se coupent en* D. *Soit* M *un point arbitrairement choisi sur la base* BC*; par* M, *on mène des parallèles aux côtés* AB, AC *et aux droites* BD, CD. *On forme ainsi deux parallélogrammes* MAPQ, MDRS. *Démontrer :*

1° *Que* PQ, RS *se coupent sur* BC*;*

2° *Que les droites* AM, RS, *d'une part;* DM, PQ, *d'autre part, sont rectangulaires.* (G. L.)

(*) Cette solution est de M. Davidoglou.



1° On a $\frac{BQ}{BA} = \frac{MB}{CB} = \frac{SB}{DB}$; de même, $\frac{CP}{CA} = \frac{RC}{DC}$, de sorte que les droites QS et PR sont parallèles à AD. Les triangles BQS, PMR sont homothétiques, etc.;

2° $\frac{SM}{MR} = \frac{BM}{MC} = \frac{AP}{PM}$; $\widehat{APM} = \widehat{SMR} = \widehat{B} + \widehat{C}$. Les deux triangles SMR et AMP sont semblables et, comme SM, MR sont, respectivement, perpendiculaires à MP, MQ, il en est de même de SR et AM.

Nota. — Autres solutions par MM. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc, Georges Rodriguez (*), à Bogota (Colombie), Droz-Farny et Goyens. M. Goyens observe que la première partie est applicable à un triangle quelconque.

QUESTION 630

Solution, par M. L'Huillier.

On considère une circonférence Γ *et un point* A, *fixe. Soit* M *un point mobile sur* Γ; *la tangente en* M *rencontre la perpendiculaire élevée au milieu de* AM *en un point* I *dont on demande le lieu géométrique.* (G. L.)

De la construction proposée, il résulte que IM = IA. Le lieu cherché est donc une droite, axe radical du point A et de la circonférence Γ. Pour construire cette droite, il suffit de mener, de A, les tangentes à Γ et de prendre les milieux de ces tangentes.

Nota. — Solutions analogues par MM. Droz-Farny, Davidoglou, Goyens.

(*) M. Georges Rodriguez nous a également adressé une très bonne solution de la question 568 (question résolue dans le dernier numéro, p. 202); cette solution nous est arrivée trop tard pour la publier.

QUESTION 631

Solution, par M. A. Droz-Farny.

Autour du point A, *on fait tourner une transversale qui coupe une circonférence* Γ *aux points* M *et* M′; *soient* ω, ω′ *les centres des circonférences qui, passant par* A, *touchent* Γ, *respectivement aux points* M, M′.

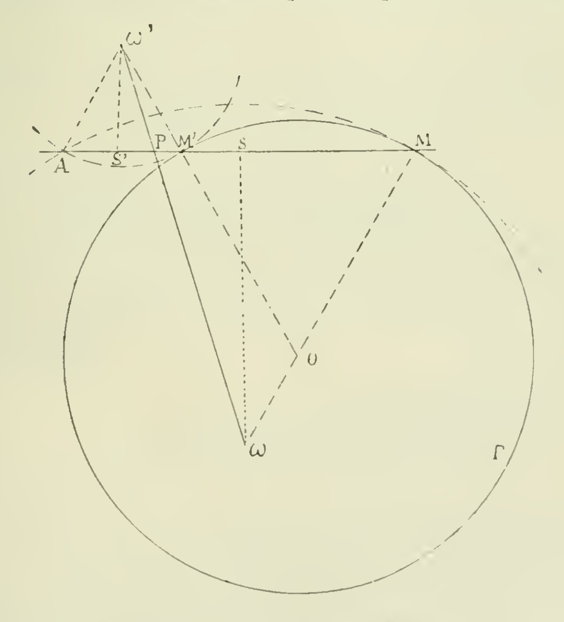
1° *Démontrer que*

$$\text{arc AM} + \text{arc AM}' = \text{arc MM}'.$$

2° *Trouver le lieu du point de rencontre des droites* MM′, ωω′;

(G. L.)

1° Soient S et S′ les points milieux des sécantes AM et AM′. Les droites OM et OM′ coupent respectivement les perpen-



diculaires élevées en S et S′ sur AM aux centres cherchés ω et ω′. Les triangles ωMA, OMM′, ωM′A étant isoscèles

semblables, il en résulte immédiatement que la figure $A\omega'O\omega$ est un parallélogramme, et par conséquent,

$$A\omega = OM' + \omega'M',$$

d'où la relation

$$\text{arc}\,AM - \text{arc}\,AM' = \text{arc}\,MM'. \qquad (*)$$

Pour un point A, mis à l'intérieur de Γ, on aurait

$$\text{arc}\,AM + \text{arc}\,AM' = \text{arc}\,MM'.$$

2° Pour démontrer la seconde partie, observons que $\omega\omega'$ rencontrant MM' en P, on a

$$\frac{S'P}{SP} = \frac{\omega'S'}{\omega S} = \frac{AS'}{AS},$$

donc

$$(AS'PS) = -1.$$

Mais les points S et S' décrivent une circonférence Γ' admettant, avec Γ, le point A comme centre de similitude $\left(\frac{R}{R'} = \frac{2}{1}\right)$, P décrit donc la polaire de A par rapport à cette circonférence, c'est-à-dire une ligne droite perpendiculaire sur AO.

Nota. — Solutions analogues par MM. Davidoglou et L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

673. — On donne une circonférence de cercle C et deux points a et b sur cette courbe. On mène les droites am, bm qui aboutissent au point m de C. On décrit une circonférence de cercle tangente à C et à ces droites. On prend la corde de contact de ce cercle et de ces droites. Démontrer que lorsque m décrit C cette corde de contact reste tangente à une circonférence de cercle. (*Mannheim.*)

674. — Démontrer que

$$\frac{2\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{2\cos\alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \text{tg}\,\alpha.$$

(*E.-N. Barisien.*)

(*) On peut toujours écrire la relation proposée sous une forme unique; il y a lieu seulement, ici, comme dans toutes les relations de la géométrie, d'affecter les segments considérés d'un signe. Dans le cas présent, on peut faire cette convention que arc AM représente une quantité positive quand le mobile allant de A vers M se meut de la gauche vers la droite de l'observateur placé au centre de l'arc, perpendiculairement à son plan. Avec cette convention, la relation arc AM + arc AM' = arc M'M est toujours vérifiée. (*G. L.*)

675. — L'équation du 4e degré

$$[b^2z^2 - a^2]^2 - 4ab(bz^3 - a)(az - b) = 0$$

est décomposable en un produit de deux facteurs du second degré. Des racines de cette équation, deux sont toujours réelles; les deux autres, toujours imaginaires.

(E.-N. Barisien.)

676. — Trois segments de droites, AB, A′B′, A″B″, sont situés sur un même plan. En général, il existe sur le plan de la figure un point P tel que les trois triangles PAB, PA′B′, PA″B″ peuvent être projetés sur un même plan suivant trois triangles directement semblables. *(G. Tarry.)*

677. — La somme des carrés des distances des sommets d'un triangle équilatéral à une droite quelconque située sur le plan de la figure est égale à trois fois le carré de la distance du centre de gravité du triangle à cette droite augmenté d'une quantité constante.

En déduire que tous les triangles équilatéraux, situés sur un même plan, se projettent sur un plan donné suivant des triangles équibrocardiens. *(G. Tarry.)*

678. — Étant donnée une ellipse E, on projette le centre O de E en P et Q sur la tangente et sur la normale tracées en un point M de E : on prolonge le rayon OM de MM′ = OM.

Montrer que les quatre droites suivantes :

1° La polaire du point P par rapport à E ;

2° La polaire du point Q par rapport à E ;

3° La droite menée par M′ parallèlement à la tangente en M ;

4° La parallèle à OM menée par le pôle de la corde normale en M ;

Concourent en un même point. *(E.-N. Barisien.)*

679. — On donne, dans un cercle O, deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′, et un point P sur BB′ [B entre B′ et P]. Sur B′P comme diamètre on décrit un demi-cercle qui coupe AA′ en P′. Par P et P′ on mène des parallèles à BA qui coupent la tangente en A, au cercle, respectivement en P_1 et P_1'. Soient Δ et Δ′ les parallèles à AA′ menées respectivement par P_1 et P_1'; Π un point variable de Δ et enfin E le point d'intersection de AD avec Δ′.

Le lieu du point M d'intersection des droites P′Π, OE est une droite. *(Davidoglou.)*

680. — On considère, dans un cercle O, un diamètre fixe AB. Un point variable M parcourt la circonférence de ce cercle. Soit M_1 un point de AB, situé entre A et B et tel que $AM_1 = AM$. Si M_2 est l'isotomique de M_1, sur AB, la perpendiculaire au milieu μ de AM_2 coupe BM en P.

Le lieu du point Q d'intersection de PO et AM est un cercle.

(Davidoglou.)

681. — Par le sommet O, d'un rectangle OABC, on mène une droite variable Δ qui coupe la diagonale AC en P et le côté AB en P_1.

Le lieu du point Q, intersection des parallèles à AB et BC, menées respectivement par P et P_1, est une hyperbole.

(Davidoglou.)

682. — Le cercle inscrit ω dans un triangle ABC touche les côtés aux points D_1, D_2, D_3. Par les points H_1, H_2, H_3 où les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre H sur ωD_1, ωD_2, ωD_3 coupent respectivement ωD_1, ωD_2, ωD_3 on mène des parallèles H_1H_1', H_2H_2', H_3H_3' à $O\omega$ (O étant le centre du cercle circonscrit) et qui rencontrent les médiatrices correspondantes aux points H_1', H_2', H_3'.

Les perpendiculaires menées, par ces points, à ces mêmes médiatrices, concourent en un même point. *(Davidoglou.)*

ERRATUM ET RECTIFICATION

Page 167, l. 7 (en remontant), *au lieu* de AC, AB, *il faut* AB, AC.

La question 551 n'a pas été résolue jusqu'ici et cette solution, comme l'auteur nous l'a fait savoir, paraît offrir plus de difficulté qu'il ne l'avait d'abord supposé. M. Lemoine nous prie d'en prévenir les lecteurs du Journal pour qu'ils ne perdent pas leur temps à une recherche probablement pénible.

Le Directeur Gérant,

G. DE LONGCHAMPS

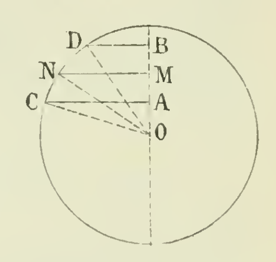
IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 18986-9-95.

SUR LE VOLUME DU SEGMENT DE SPHÈRE

Par M. **Ernest Lebon**, professeur au lycée Charlemagne.

I

Trouver la formule donnant le volume d'un segment de sphère en fonction de sa hauteur et du rayon du cercle équidistant de ses bases.



Soient AC ou r et BD ou r' les rayons des cercles bases d'un segment de sphère de centre O, de rayon R, AB ou h la hauteur du segment, MN ou ρ le rayon du cercle équidistant des bases.

On sait que la formule donnant le volume v du segment de sphère est

$$(1) \qquad v = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi h(r^2 + r'^2).$$

Or, on a successivement

$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 - \overline{OA}^2 \\ &= \rho^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 \\ &= \rho^2 + (OM + OA)(OM - OA) \\ &= \rho^2 + \left(2.OM - \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2} \\ &= \rho^2 + OM.h - \frac{h^2}{4}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} r'^2 &= R^2 - \overline{OB}^2 \\ &= \rho^2 + \overline{OM}^2 - \overline{OB}^2 \\ &= \rho^2 - (OB + OM)(OB - OM) \\ &= \rho^2 - \left(2.OM + \frac{h}{2}\right)\frac{h}{2} \\ &= \rho^2 - OM.h - \frac{h^2}{4}. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$r^2 + r'^2 = 2\rho^2 - \frac{h^2}{2}.$$

Remplaçant, dans la formule (1), $r^2 + r'^2$ par cette valeur, on obtient, pour la formule cherchée,

$$(2) \qquad v = \pi h\left(\rho^2 - \frac{h^2}{12}\right).$$

II

Comme le volume d'un segment de sphère ne dépend que de sa hauteur et du rayon de sa section moyenne, on peut dire que

Deux plans parallèles à un cercle commun à plusieurs sphères et équidistants de ce cercle déterminent dans les sphères qu'ils coupent des segments équivalents (*).

NOTE DE GÉOMÉTRIE

par **M. Droz-Farny**, professeur au lycée de Porrentruy.

Dans Casey « *A Sequel to Euclid* », book VI, page 113, on trouve le théorème suivant qui mériterait d'être plus connu :

La différence des carrés des tangentes que l'on peut mener d'un point à deux circonférences données est égale au double produit de la distance du point à l'axe radical des deux circonférences par la distance de leurs centres.

La démonstration en est très aisée; ce théorème fournit comme corollaires la plupart des théorèmes cités par Chasles dans le chapitre sur les axes radicaux. *(Géométrie supérieure.)*

Supposons le point P sur une des circonférences, la tangente correspondante deviendra nulle, d'où :

Corollaire 1. — Le carré de la tangente que l'on peut mener d'un point d'une circonférence à une seconde circonférence est égal au double produit de la distance de ce point à l'axe radical par la distance des deux centres.

Supposons trois cercles O, O′, O″ appartenant à un même faisceau, P un point quelconque pris sur O et X la dis-

(*) Il existe une autre formule du même genre dite *Formule prismoïdale à deux termes*, c'est la formule de Kinkelin, donnée par ce géomètre dans le tome XXXIX des *Grunert's Archiv*. (Voir l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, n° d'octobre 1895, p. 388.) *G. L.*

tance de P à l'axe radical commun. On aura

$$\overline{T'}^2 = 2X.OO'$$
$$\overline{T''}^2 = 2X.OO''$$

par division $$\frac{\overline{T'}^2}{\overline{T''}^2} = \frac{OO'}{OO''}$$

Corollaire 2. — Les tangentes que l'on peut mener d'un point quelconque d'une circonférence à deux circonférences appartenant avec la première à un même faisceau sont entre elles dans un rapport donné.

La réciproque est évidemment valable.

Corollaire 3. — Le lieu des points d'où l'on peut mener à deux circonférences des tangentes qui sont entre elles dans un rapport donné est une circonférences passant par les points de coupe des deux circonférences données.

(Application au cercle de similitude de deux circonférences.)

Supposons que le cercle du corollaire 1, auquel on mène la tangente devienne un cercle point, on obtient :

Corollaire 4. — Un point et une circonférence sont donnés; le carré de la droite menée du point O' à un point quelconque de la circonférence O est à la distance de P à l'axe radical de O' et O dans un rapport donné.

On a $$\frac{\overline{O'P}^2}{X} = 2OO'.$$

Ce corollaire fournit une solution immédiate du problème 632 (*), proposé par M. de Longchamps.

On considère une circonférence Γ et un point A. Démontrer que, à ce point A, correspond une droite α telle que le rapport $\frac{\overline{MA}^2}{MH}$ reste constant, M désignant un point quelconque de Γ, MH étant la distance de M à la droite α.

Le cercle Γ et le point H, celui-ci considéré comme un des points limites, déterminent un faisceau de cercles; l'axe radical sera la droite α cherchée.

Le corollaire **2** donnerait lieu aussi à une remarque analogue, en supposant qu'un des deux cercles devienne un des points limites.

(*) Résolu page 257.

Si les deux cercles coïncident avec les points limites, on obtient le *théorème d'Apollonius*.

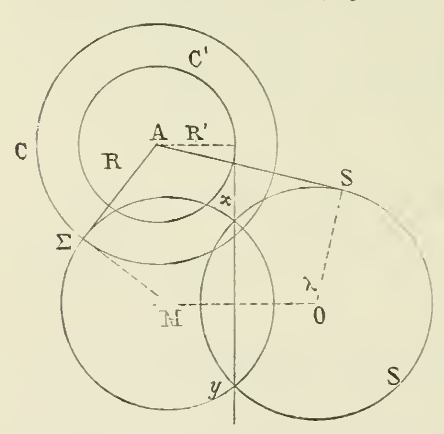
Pour terminer, je vais appliquer le théorème qui fait l'objet de cette note à la résolution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation de 1893. J'obtiendrai ainsi une solution beaucoup plus simple que toutes celles qui ont été publiées.

Étant donnés deux cercles C et C_1 qui ont même centre A et un troisième cercle S dont le centre est O, on considère les cercles Σ orthogonaux à C et tels que l'axe radical de chacun d'eux et du cercle S touche le cercle S_1.

1° Démontrer que le lieu des centres des cercles Σ est un cercle S_1.

(Pour abréger le langage, nous dirons que S_1 correspond au cercle S.)

2° On suppose que les deux cercles C et C_1 sont confondus et l'on propose d'étudier dans cette hypothèse la position relative des cercles S et S_1 quand on fait varier le rayon du cercle S, le cercle C et le centre O du cercle S restant fixes.



Soient x et y les points d'intersection des circonférences Σ et S, M le centre de Σ, λ le rayon de S et R et R' les rayons des cercles C et C'; appelons enfin $A\Sigma$ et AS les tangentes menées de A aux circonférences Σ et S; la distance de A à l'axe radical xy étant R', on a immédiatement

$$\pm\left(\overline{AS}^2 - \overline{A\Sigma}^2\right) = 2R'.MO,$$

d'où
$$MO = \frac{\pm\left(\overline{AS}^2 \pm R^2\right)}{2R'} = \text{constante};$$

le lieu du centre de Σ est un cercle S' concentrique à S.

En représentant la distance AO par d, on a

$$MO = \pm \left(\frac{d^2 - \lambda^2 - R^2}{2R'}\right).$$

Un cas intéressant est le suivant :

Supposons $R = 0$, alors que le cercle Σ passe par A ; supposons en outre que les cercles C' et S soient orthogonaux, on aura

$$d^2 - \lambda^2 = \overline{R'}^2,$$

et par conséquent, la formule précédente devient

$$MO = \frac{R'^2}{2R'} = \frac{R'}{2}.$$

Théorème. — *Deux circonférences orthogonales de centres* O *et* O', *de rayons* R *et* R', *sont données ; une tangente quelconque à* O *coupe* O' *en* x *et* y. *Le lieu géométrique du centre de la circonférence circonscrite au triangle* Oxy *est une circonférence concentrique à* O' *et de rayon* $\frac{R'}{2}$.

Si les cercles C et C' sont confondus, la formule devient

$$MO = \pm \frac{d^2 - \lambda^2 - R^2}{2R}.$$

Cette formule donne lieu à une discussion très facile.

EXERCICES DIVERS

Par **M. Aug. Boutin.**

409. — *Vérifier les identités :*

$$\frac{2^{4n-2}}{(4n)!} = \frac{1}{(4n)!} + \frac{1}{(4n-2)!\,2!} + \frac{1}{(4n-4)!\,4!} + \dots + \frac{1}{(2n+2)!\,(2n-2)!} + \frac{\frac{1}{2}}{(2n)!\,(2n)!};$$

$$\frac{2^{4n-2}}{(4n)!} = \frac{1}{(4n-1)!\,1!} + \frac{1}{(4n-3)!\,3!} + \frac{1}{(4n-5)!\,5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)!};$$

$$\frac{2^{4n}}{(4n+2)!} = \frac{1}{(4n+2)!} + \frac{1}{(4n)!\,2!} + \frac{1}{(4n-2)!\,4!} + \dots + \frac{1}{(2n+2)!\,(2n)!};$$

$$\frac{2^{4n}}{(4n+2)!} = \frac{1}{(4n+1)!\,1!} + \frac{1}{(4n-1)!\,3!} + \frac{1}{(4n-3)!\,5!} + \dots + \frac{\frac{1}{2}}{(2n+1)!\,(2n+1)!};$$

$$\frac{2^{2n-2}}{(2n-1)!} = \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{2!(2n-3)!} + \dots + \frac{1}{(2n-4)!3!} + \frac{1}{(2n-2)!1!};$$

$$\frac{\pm 1}{1.3.5.7\dots(2n+1)} = \frac{1}{(2n+1).2.4.6\dots(2n)} - \frac{1}{(2n-1)2.4.6\dots(2n-2).2} + \frac{1}{(2n-3)2.4.6\dots(2n-4).2.4} - \frac{1}{(2n-5)2.4.6\dots(2n-6).2.4.6} + \dots$$

$$\dots \mp \frac{1}{3.2.2.4.6\dots(2n-2)} \pm \frac{1}{2.4.6\dots(2n)}.$$

410. — *Vérifier l'identité :*

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7}.$$

411. — *Si on pose*

$$x + \frac{1}{x} = z_1 = z, \qquad x^n + \frac{1}{x^n} = z_n,$$

vérifier que l'on a :

$$z_1 + 2z_2 + 3z_3 + \dots + nz_n = \frac{nz_{n+1} - (n+1)z_n + 2}{z-2}.$$

412. — *Dans quels cas, si, à un carré, on ajoute l'entier* n, *la somme est-elle un triangulaire?*

L'équation indéterminée

$$\frac{x(x+1)}{2} = y^2 + n,$$

peut être résolue en nombres entiers pour les valeurs suivantes de n.

1.2.3.5.6.9.10.11.12.14.15.17.19.20.24 ...

Quand elle a une solution, elle en a une infinité.

Les valeurs de n pour lesquelles la même équation n'est pas résoluble sont :

4.7.8.13.16.18.22.23.25.26.31.33 ...

En général, le problème est impossible lorsque $8n+1$, étant décomposé en ses facteurs premiers, un ou plusieurs de ces facteurs sont de la forme $8k \pm 3$, avec un exposant impair.

413. — *Dans quels cas, si, à un triangulaire, on ajoute l'entier* n, *la somme est-elle un carré ?*

Quand le problème est possible, il admet, comme le précédent, une infinité de solutions. Il n'y a aucune solution pour les valeurs suivantes de n :

2.5.7.11.12.14.17.18.20.23.27.29.31.32.37 ...

et, en général, pour toutes les valeurs de n telles que $8n-1$ étant décomposé en ses facteurs premiers, un ou plusieurs de ces facteurs sont de la forme $8k \pm 3$, affectés d'un exposant impair.

CORRESPONDANCE

(**Solution** de la question 616.)

Extrait d'une lettre de M. G. Tarry :

... La proposition 616 (*) est des plus simples à établir.

La première partie est évidente.

La réciproque repose sur ce lemme :

Si deux figures F, F′ inversement (ou symétriquement) égales, ont un point double O, elles sont symétriques par rapport à une droite qui passe par le point double.

En effet, soient A, A′ deux points homologues.

Construisons la figure F_1 symétrique de la figure F, par rapport à la bissectrice Ox de l'angle AOA′.

Les points O, A′ de la figure F_1 ont pour homologues les points O, A dans la figure F, et par suite, les points O et A′ dans la figure F′; donc les figures égales F_1 et F′, qui ont deux points doubles, O et A′, se confondent, ce qui démontre le lemme.

Cela posé, soient F_1, F_2, F_3 trois figures directement égales; S_1, S_2, S_3 les centres de rotation (ou points doubles) de F_2 et F_3, F_3 et F_1, F_1 et F_2.

Appelons F_0 la figure symétrique de F_1, par rapport à la droite S_2S_3.

Les figures inversement égales F_0 et F_3 ont pour point

(*) Nous n'avons pas reçu de solution pour la question 616 posée par M. Tarry (*Journal*, p. 71).

double S_2 et sont par conséquent symétriques par rapport à une droite S_2x.

Pareillement les figures F_0 et F_2 sont symétriques par rapport à une droite S_3y.

Le point d'intersection des droites S_2x et S_3y, étant évidemment un point double des figures F_2 et F_3, n'est autre que S_1.

Donc la figure F_0 est symétrique aux figures F_1, F_2, F_3 par rapport aux droites S_2S_3, S_3S_1, S_1S_2. C. Q. F. D.

Comme vous l'aviez bien prévu, l'intérêt de la question réside dans la méthode qui est indiquée ; c'est la plus naturelle et la plus simple.

Des considérations aussi simples et aussi naturelles conduisent à la loi du mouvement hélicoïdal.

... Les propriétés du carré magique de 3, parues dans le n° de mars (incomplètement présentées d'ailleurs), peuvent être étendues considérablement.

La généralisation de ces propriétés m'a permis de construire des carrés magiques d'une espèce particulière, que j'appelle *cabalistiques*.

Tout carré dont le module est un nombre carré impair quelconque n^2 peut être construit de telle manière que le carré soit magique aux deux premiers degrés.

Les deux constantes se trouvent non seulement dans les n^2 rangées horizontales, les n^2 colonnes verticales, $2n$ lignes diagonales, mais encore dans les n^2 carrés mineurs de module n dans lesquels est décomposé le carré de module n^2.

De plus, si le nombre impair n ne renferme ni le facteur 3, ni le facteur 5, les n^2 carrés mineurs sont diaboliques.

Le plus petit carré jouissant de ces propriétés a pour module $7^2 = 49$.

Je viens de construire le carré cabalistique de module 49 et je compte le présenter au Congrès de Bordeaux (*).

(*) Cette Note, depuis que la lettre que M. Tarry nous a écrite, a été présentée au Congrès de Bordeaux, sous le titre *Sur la théorie des carrés magiques à plusieurs degrés*, dans la séance du 6 août dernier.

Cette Note est accompagnée du *carré cabalistique* de module 49, le plus petit des carrés de l'espèce qui a tous ses carrés mineurs *diaboliques*.

Je sentais bien que dans cette petite propriété du carré magique de 3 il y avait en germe un théorème sur les carrés magiques à plusieurs degrés.

Alger; juillet 1895.

Extrait d'une lettre de M. Bernès.

Voici quelques remarques inspirées par les derniers numéros du *J. É.*

1° La démonstration de la relation $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B - C)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C)} = \dfrac{b - c}{b + c}$,

donnée par M. Brand dans le numéro de juillet, est fort bonne. Elle peut être présentée et établie plus simplement comme il suit :

Sur AC portons AD et AE égaux à AB, et soit F la rencontre de BE et de la parallèle menée par C à BD. L'angle FCE, complémentaire de E ou $\frac{A}{2}$, est égal à $\frac{1}{2}(B + C)$.

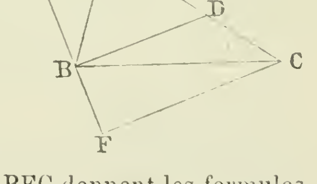
et l'angle FCB est égal à $\frac{1}{2}(B + C) - C$ ou $\frac{1}{2}(B - C)$.

On a donc $FB = FC.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B - C)$

$FE = FC.\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B + C)$.

Et la proportion $\frac{FB}{FE} = \frac{CD}{CE}$ donne

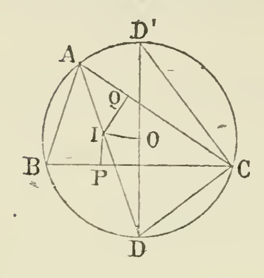
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)} = \frac{b-c}{b+c}.$$

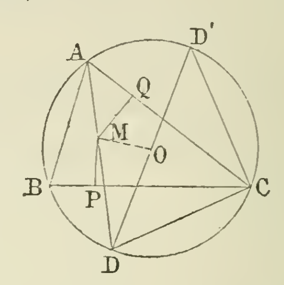


Remarque. — Les triangles BDC, BEC donnent les formules utiles :

$$\frac{b - c}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B - C)}{\cos\frac{A}{2}}, \qquad \frac{b + c}{a} = \frac{\cos\frac{1}{2}(B - C)}{\sin\frac{A}{2}}.$$

La dernière, qu'on trouve dans toutes les trigonométries, est la question 607 (E.-N. Barisien).





2° La relation $IO^2 = R^2 - 2Rr$ ou $IA.ID = -2Rr$, dont le numéro de septembre contient une démonstration, résulte plus simplement de la similitude des deux triangles rectangles AIQ, D'DC; où D'D est le diamètre perpendiculaire à BC, et Q la projection de I sur AC.

Elle peut être généralisée : *Si sur une corde quelconque* AD, *tracée par* A, *on porte* $DM = DC$, *on aura* $MO^2 = R^2 \mp 2R.MQ$ *selon le sens* DM *et celui de* IQ.

D'où ce théorème :

Le lieu des points M *définis comme il vient d'être dit est formé de deux cercles, l'un décrit sur* II_B *et l'autre sur* I_AI_C *comme diamètres.*

Et encore : *Si sur une corde quelconque* AD *tracée par* A *on porte* DM *tel que* $\frac{DM}{DC} = \frac{MP}{MQ}$ (P, Q *projection de* M *sur* BC, AC), *on aura* $MO^2 = R^2 \mp 2RMP$ *selon les sens de* DM, MP, MQ.

D'où ce théorème :

Le lieu des points M *définis comme il vient d'être dit est formé de deux cercles, l'un décrit sur* II_A *et l'autre sur* I_BI_C *comme diamètres.*

La recherche directe de chacon de ces lieux donne une équation du quatrième degré qu'on peut s'exercer à décomposer.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons de cosmographie, par MM. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris et H. ANDOYER (*), maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons d'arithmétique théorique et pratique par Jules TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'Ecole Normale supérieure.

Ces deux volumes qui viennent de paraître à la librairie Colin, 5, rue de Mézières, font partie d'un cours complet de mathématiques élémentaires qui se publie sous la direction de M. Darboux, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Des livres, signés de tels noms, se recommandent d'eux-mêmes; nous ne saurions les louer sans inconséquence et notre rôle doit se borner à signaler leur apparition aux lecteurs du Journal.

On a souvent discuté sur ce point, qui n'est pas sans intérêt. « Est-il préférable qu'un livre pédagogique, traitant de sujets élémentaires, un livre visant l'instruction des débutants, soit écrit par l'homme qui est chargé de cette instruction, par le professeur de la classe? Vaut-il mieux, au contraire, qu'il sorte de la plume d'un savant, au sens le plus élevé du mot, d'un homme habitué à fréquenter la science dans ses plus hautes conceptions, mais n'ayant pas professé, depuis longtemps au moins, devant la jeunesse à laquelle le livre est destiné, les matières qui composent son ouvrage? » C'est le cas, je crois, des auteurs du cours de Mathématiques élémentaires; de M. Tisserand notamment, qui, avant d'écrire ce modeste livre, a publié une Mécanique céleste, œuvre magistrale, dans laquelle il a su joindre, à l'érudition la plus complète du sujet qu'il traitait, beaucoup d'ordre et une grande clarté d'exposition, mais qui n'a cessé, depuis sa sortie de l'École Normale, d'appartenir à l'enseignement supérieur. Dans cette controverse il y a beaucoup à dire, pour défendre l'une ou l'autre opinion et, certes, dans cette controverse, les arguments ne font pas défaut pour conclure, avec toute l'apparence de la vérité, dans un sens ou dans l'autre. Au fond les uns et les autres ont également raison. En principe, l'homme qui est rompu aux besoins de l'enseignement, placé par métier au milieu de la jeunesse, paraît *a priori* mieux désigné pour rédiger, dans

(*) Puisque le nom de M. Andoyer tombe ici sous notre plume, nous signalerons à l'attention des professeurs et à celle des élèves qui commencent l'étude théorique de l'arithmétique le *Cours d'arithmétique* qu'il vient de publier à la librairie Belin. Ce petit livre, que nous avons lu avec un intérêt particulier, bien qu'il n'ait pas été soumis à notre analyse, est rédigé avec une clarté parfaite, une méthode et un ordre remarquables. Je ne saurais trop louer l'auteur d'avoir résolument adopté l'usage systématique des lettres pour représenter les nombres. Il a voulu, et avec raison, battre en brèche un vieux préjugé qui ne tardera pas, je l'espère, à disparaître et cette écriture symbolique évitera à nos futurs jeunes écoliers bien des ennuis qui n'ont pas été, hélas! suffisamment épargnés à leurs anciens.

l'esprit qui convient aux élèves, esprit qu'il est, par sa situation, plus à même de juger, l'ouvrage qui leur est destiné. Mais rien n'empêche pourtant que ce même ouvrage ne soit tout aussi bien composé par des maîtres de la science, bien qu'ils vivent loin des lecteurs auxquels ils s'adressent, et que le livre ainsi composé ne possède, par surcroît, ce souffle vivifiant qui descend de lui-même des sommets de la science et donne aux livres dans lesquels il circule une valeur particulière. Il est permis de croire que le souffle dont nous parlons, en pénétrant l'âme de nos élèves, est singulièrement propre à les rendre meilleurs, en leur inspirant, avec l'idée, encore bien confuse chez eux, de la science et de l'amour qu'on lui doit, la raison supérieure des choses. Si nous nous étions jamais permis d'en douter, les deux livres que nous venons de lire et, aussi, celui que nous signalons dans la note placée au bas de la page précédente, nous auraient clairement montré notre erreur. *G. L.*

Traité d'Aritmétique, par C. A. Laisant et E. Lemoine, Directeurs de l'*Intermédiaire des matématiciens;* suivi de **Notes sur l'ortografie simplifiée**, par P. Malvezin, Directeur de la Société filologique française. (Paris, Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.)

La préface de l'ouvrage que nos amis MM. Laisant et Lemoine viennent de faire paraître dit nettement à quelle idée principale ils ont obéi en écrivant ce traité d'arithmétique.

« Le petit traité qu'on va lire, dit la préface, a la prétension de présenter, sous une forme à la fois simple et rigoureuse, les éléments du calcul numérique et de la théorie des nombres. Nous sommes convaincus, contrairement à l'opinion généralement reçue, qu'il n'est pas impossible de raisoner juste en enseignant les principes des sciences et qu'il vaut toujours mieux dire aux enfants les raisons exactes des choses, que de leur cacher ou de leur dissimuler ce qu'on est convenu d'appeler des dificultés. Ces dificultés, d'ailleurs, sont plus aparentes que réèles et èles n'ont existé, la plupart du temps, que parce que les persones chargées d'enseigner l'aritmétique n'ont pas toujours été bien préparées à cet enseignement par une étude sufisamment aprofondie de la filosofie de la science »

MM. Laisant et Lemoine ont formulé là un excellent programme, mais, je crois que tout le monde partage, sur ce point, leur opinion. Pourtant, qu'ils me permettent de le dire, ils me paraissent bien sévères dans le jugement qu'ils portent ainsi sur les professeurs chargés de l'enseignement de l'arithmétique. J'espère qu'ils ne m'en voudront pas de prendre la défense de ceux-ci contre le reproche qu'ils leur adressent et qui me paraît immérité. Peut-être ce reproche a-t-il eu autrefois quelque raison d'être, mais, aujourd'hui, je puis le leur affirmer, il n'est nullement justifié. Il y a longtemps, par exemple, qu'on a abandonné cette définition de la multiplication qu'ils citent dans leur préface et qu'on enseigne celle, parfaitement nette, qu'ils ont eux-mêmes adoptée (*). Quant à la définition du nombre (**),

(*) Dans l'arithmétique de M. Andoyer, signalée plus haut, je lis : *multiplier un nombre* a *par un nombre* b, *c'est additionner* b *nombres égaux à* a. Il me semble qu'on ne peut mieux dire, en moins de mots, pour définir la multiplication des nombres entiers.

(**) On appelle NOMBRE *une locution et un signe qui servent à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui sont égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont plus grandes ou plus petites.*

définition quelque peu métaphysique, reposant sur l'idée première qui correspond au mot *quantité*, et sur les notions des quantités égales ou inégales, je me suis demandé s'il n'était pas préférable, contrairement à ce que pensent MM. Laisant et Lemoine, de se borner, sur ce point délicat, à la bonne et vieille habitude de l'enseignement. Croient-ils que le très jeune étudiant qui aborde l'étude de l'arithmétique théorique, celle où l'on ne se borne plus à la manipulation des opérations, mais où l'on s'efforce d'expliquer nettement les choses et les mots, croient-ils vraiment que cet enfant comprendra clairement cette définition du nombre? N'est-il pas plus sage d'élever, peu à peu, l'esprit à l'idée générale des grandeurs en procédant, comme on le fait ordinairement, par lui inculquer l'idée du nombre entier, puis celle du nombre fractionnaire pour aboutir enfin à la notion du nombre incommensurable?

Je tenais à dire ce qui précède; mais, ces réserves faites, je reconnais que le traité d'arithmétique de MM. Laisant et Lemoine est un livre qui appelle l'attention et qui sera lu avec d'autant plus d'intérêt qu'il sort très sensiblement du moule ordinaire, je veux dire du moule universitaire; il est suggestif. Je dois ajouter que sa rédaction est parfaite et qu'il est admirablement imprimé.

Commel e prouvent le titre et la citation que nous avons reproduits plus haut, ce traité est écrit avec ce qu'on appelle la nouvelle orthographe. Cette réforme, je le sais, a dans MM. Laisant et Lemoine de chauds partisans. Pour moi, très incompétent d'ailleurs en la matière, je n'attache pas, s'il faut dire ici mon avis, grand intérêt à la chose; mais il m'a toujours semblé que la réforme, telle qu'elle était proposée, ne retranchait qu'un très petit nombre des difficultés inhérentes à notre orthographe et je crois qu'il valait mieux, soit laisser les choses en l'état, soit proposer la révolution complète, celle qui vraiment simplifiera nos règles d'orthographe, en édictant des lois nouvelles, tranchant vigoureusement et définitivement dans le vif (*).

Pour compléter ce bulletin bibliographique, un peu chargé naturellement au début d'une année scolaire, nous avons encore à signaler à l'attention de nos lecteurs plusieurs publications éditées par la société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois.

D'abord les **Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique**, à l'usage des candidats à l'école spéciale militaire de Saint-Cyr, par M. A. Tournois, ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur agrégé de mathématiques au lycée Lakanal (Cours de Saint-Cyr).

Dans cet ouvrage sont développées les parties du cours de mathématiques spéciales qui ont été introduites, il y a quelques années, à tort, je crois, dans le programme des examens de Saint-Cyr. Un pareil livre ne peut évidemment comporter, de la part de celui qui l'écrit, qu'une part très faible d'originalité. Il doit s'efforcer d'être clair et s'imposer, comme une règle inflexible, de rester scrupuleusement dans les limites du programme qu'il développe. Il m'a semblé que ces deux conditions essentielles s'appliquaient bien au livre de M. Tournois. Je me permets de lui signaler, quand il corrigera les épreuves de la deuxième édition, de trop nombreuses

(*) J'ai communiqué à M. Lemoine les observations qui précèdent; il y a répondu dans une lettre qui sera publiée dans le numéro prochain.

fautes typographiques, en dehors de celles qui sont indiqués en dernière page. Qu'il relise, par exemple, la seconde moitié de la page 15 et celle de la page 45 et il sera certainement de mon avis.

Enfin, je dois encore signaler, à cette même librairie, les *Manuels du baccalauréat* écrits par M. L. Gérard, docteur ès sciences, professeur au lycée de Lyon.

Ces manuels visent la préparation aux baccalauréats de l'enseignement secondaire : le *baccalauréat classique* (1re partie, 2e partie, 2e série) et le *baccalauréat moderne* (1re partie, 2e partie, 2e et 3e séries).

Ils sont rédigés, comme nous l'apprend le prospectus qui les accompagne, par les meilleurs professeurs des lycées de Paris et des départements. Leur succès ne saurait donc être douteux.

Il y a longtemps qu'on a dit du mal des manuels; mais ils ont la vie dure, probablement parce qu'ils répondent à un véritable besoin dans la préparation des examens, et plus particulièrement peut-être, pour des raisons inutiles à approfondir, dans celle des baccalauréats, qu'ils soient classiques ou modernes, d'une 1re partie ou d'une 2e partie, d'une série, ou d'une autre. Ecrire un bon manuel n'est pas une chose aussi facile qu'on serait tenté de le croire. Il y faut beaucoup d'ordre; il faut surtout posséder à fond l'art d'éliminer toutes les choses qui ne visent pas directement l'examen, aux exigences duquel le manuel se propose de répondre.

Deux volumes, à notre connaissance, ont paru jusqu'ici : la *Géométrie* et la *Trigonométrie*. Il y a beaucoup de choses dans ces deux volumes, bien qu'ils soient de petites dimensions, comme il convient à tout bon manuel, qui doit tenir facilement dans la main, et même dans la poche du candidat. Je signalerai, comme m'ayant particulièrement frappé, la démonstration du théorème de Pythagore, que j'ai lue dans le premier; elle m'a beaucoup plu par sa simplicité. Mais je ne sais pas si la définition, donnée dans ce livre, de la longueur d'un arc de cercle, définition qui repose sur un axiome discutable, sera bien goûtée.

G. L.

BACCALAURÉATS

(SESSION D'AVRIL 1895)

Académie d'Aix.

BACCALAURÉAT COMPLET ET CLASSIQUE

Un angle d'un triangle étant donné, on suppose constante la somme des deux côtés adjacents, et l'on demande les maxima ou minima de l'aire du triangle, du troisième côté, des autres angles, des hauteurs du triangle, du rayon de chaque cercle, circonscrit, inscrit et exinscrit.

1° Comment faudrait-il établir le calendrier si la durée de l'année était en jours de 365 j. 19?

2° *Problème.* Dans un plan vertical, une barre pesante et homogène AB est mobile autour de son extrémité A qui est fixe; l'extrémité B de la barre s'appuie contre une barre verticale fixe XY. La barre AB pèse 10 kilog., sa longueur est de 2 mètres et la distance du point A à la verticale XY est égale à 1 mètre.

On demande de calculer en kilogrammes les pressions que la barre AB exerce sur le point A et sur la verticale XY.

Académie d'Alger.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. — Établir la formule qui donne la surface de la zone.

II. — *Problème.* A quelle hauteur faudra-t-il s'élever au-dessus de la surface de la terre supposée sphérique pour apercevoir la centième partie de la surface totale ?

Quel angle ferait avec la verticale la tangente que l'on mènerait du point trouvé à la surface de la terre?

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Questions au choix:* 1° Connaissant la trace horizontale d'un plan et l'angle de ses deux traces, trouver la trace verticale.

2° Étant donnés un triangle, dans le plan horizontal, et un point quelconque dans l'espace, construire une sphère passant par ce point et tangente aux trois côtés du triangle.

3° Étant donnés deux points sur la ligne de terre, un point dans le plan vertical et un point dans le plan horizontal, déterminer la sphère passant par les quatre points.

II. — *Problème obligatoire.* Étant donnée une demi-circonférence AMB, comment faut-il mener la corde AM pour qu'en faisant tourner la figure autour de AB les deux portions du demi-cercle déterminées par cette corde engendrent des volumes égaux?

Académie de Besançon.

On donne un demi-cercle ayant pour diamètre AB, et on considère une tangente AD à l'extrémité A de ce diamètre. On demande de déterminer un point C sur ce demi-cercle, de telle sorte que, si on mène la tangente en C au demi-cercle jusqu'à sa rencontre en D avec la tangente AD, la somme des surfaces engendrées par les droites AD et CD tournant autour de AB soit à la surface engendrée par l'arc AC tournant autour de la même droite dans un rapport donné m. — Discuter.

Académie de Bordeaux.

BACCALAURÉAT COMPLET

1° Étant donnée une progression géométrique décroissante dont le premier terme est a et dont la raison est représentée par q, on fait les sommes

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, \text{ de } n \text{ termes consécutifs},$$

S_1 commencant au premier terme; S_2 au deuxième terme, etc...

a) Trouver l'expression de S_1, S_2, ...

b) Calculer $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n$; cas de $n = \infty$.

2° Étant donné un cercle de centre O, de rayon R, mener, par un point extérieur A, une sécante MN telle que le cercle décrit sur MN comme diamètre soit tangent à la droite AO.

QUESTION 650

Solution par M. A. Droz-Farny.

1° Dans tout triangle, les perpendiculaires élevées, par le centre de gravité, aux trois médianes, coupent les côtés correspondants en trois points en ligne droite;

2° Si les perpendiculaires élevées par le centre de gravité aux médianes BM′, CM″ *coupent respectivement* AC, AB *en* F, F′, *la droite* FF′ *coupe* BC *en un point* A″ *situé sur une droite avec les point analogues* B″, C″. (A. Davidoglou.)

La propriété énoncée par M. Davidoglou n'est qu'un cas très particulier du théorème suivant et de sa réciproque :

Si d'un point on mène des droites aux trois sommets d'un triangle et trois autres droites formant avec ces premières trois couples en involution, ces trois droites iront rencontrer les côtés opposés du triangle en trois points situés en ligne droite. (Chasles, *Géom. sup.*, page 247.)

Le 2° a été rédigé par méprise; la propriété qu'il signale n'est en effet que la répétition de celle qui est énoncée dans le premier.

Nota. — M. Bernès en nous faisant la même observation ajoute :

Soient $x_1 . y_1$, z_1 les coordonnées normales d'un point P, pris dans le plan d'un triangle ABC ; les perpendiculaires élevées en P, aux droites PA, PB, PC rencontrent les côtés correspondants en trois points situés sur une droite p. L'équation de p est

$$\sum \frac{x}{x_1 y_1 \cos B + z_1 x_1 \cos C - x_1^2 \cos A + y_1 z_1} = 0.$$

En désignant par φ, φ', φ'' respectivement, les angles (PB, PC), (PC, PA), (PA, PB), l'équation de p est

$$\frac{x}{x_1} \operatorname{tg} \varphi + \frac{y}{y_1} \operatorname{tg} \varphi' + \frac{z}{z_1} \operatorname{tg} \varphi'' = 0,$$

qu'on peut écrire aussi

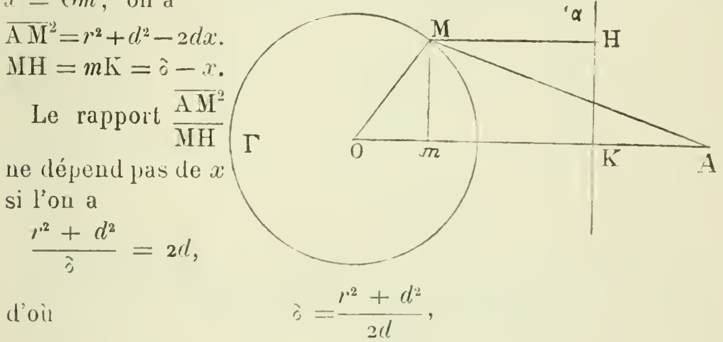
$$\sum \frac{a . PA . x}{\cos \varphi} = 0.$$

QUESTION 632

Solution par M. H. Lhuillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

On considère une circonférence Γ *et un point* A. *Démontrer que, à ce point* A, *correspond une droite* α *telle que le rapport* $\frac{\overline{\text{MA}}^2}{\text{MH}}$ *reste constant* ; M *désignant un point quelconque de* Γ, MH *étant la distance de* M *à la droite* α. (G. L.)

Appelons d, δ les distances de O au point A et à la droite α qui, par raison de symétrie, est perpendiculaire à OA. Soit $x = \text{O}m$; on a



$$\overline{\text{AM}}^2 = r^2 + d^2 - 2dx.$$

$$\text{MH} = m\text{K} = \delta - x.$$

Le rapport $\frac{\overline{\text{AM}}^2}{\text{MH}}$ ne dépend pas de x si l'on a

$$\frac{r^2 + d^2}{\delta} = 2d,$$

d'où

$$\delta = \frac{r^2 + d^2}{2d},$$

distance que l'on construira facilement.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny et Davidoglou.

QUESTION 633

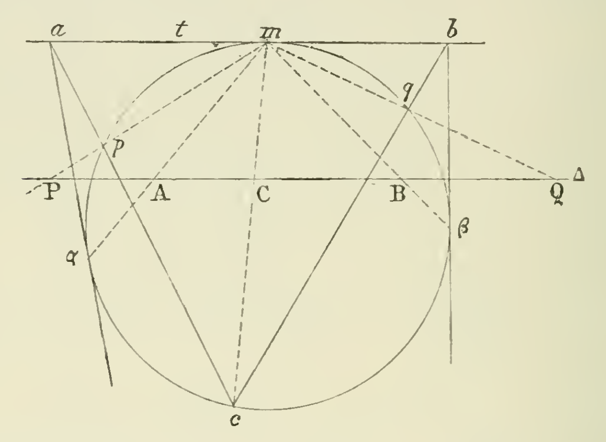
Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une circonférence de cercle, la tangente en m *à cette courbe et deux points* a *et* b *sur cette droite. Les droites qui joignent un point quelconque* c *de la circonférence aux points* a *et* b *rencontrent de nouveau la circonférence en* p *et* q *: démontrer que les droites* mp, mq *interceptent sur une paral-*

lèle à la tangente donnée, un segment qui est de grandeur constante, quelle que soit la position de c *sur la circonférence.*

(Mannheim.)

Menons de a et de b les secondes tangentes $a\alpha$ et $b\beta$ à la circonférence. Les droites mp, $m\alpha$, mc, mp, mq, rencontrent Δ respectivement en P, A, C, B, Q. D'après un théorème bien connu, les points m, p, et c forment un



groupe harmonique sur la circonférence. Le faisceau $m(ap\alpha c)$ est donc harmonique et comme Δ est parallèle à ma, il en résulte que $AP = AC$; de même $BC = BQ$ et par conséquent $PQ = 2AB. =$ constant.

Remarque. — La circonférence peut évidemment être remplacée par une conique quelconque.

Nota. — Autre solution par M. Davidoglou.

QUESTION 635

Solution par M. Davidoglou.

Soient A′, B′, C′ *les points de rencontre de la droite* Δ *qui passe par les deux points de Brocard d'un triangle* ABC *avec les côtés de ce même triangle; désignons par* α, β, γ *les distances algébriques des points* A′, B′, C′ *au premier point de Brocard et par* p_a, p_b, p_c

les distances algébriques des sommets du triangle Δ. *On a la relation*

$$\frac{a^2}{b^2}\left[\frac{1}{\alpha . p_a}-\frac{1}{\beta . p_b}\right]+\frac{b^2}{c^2}\left[\frac{1}{\beta . p_b}-\frac{1}{\gamma . p_c}\right]+\frac{c^2}{a^2}\left[\frac{1}{\gamma . p_c}-\frac{1}{\alpha . p_a}\right]=0.$$

(Louis Bénézech.)

Abaissons $\omega\omega_a$, $\omega'\omega'_a$ perpendiculaires sur BC. On a

$$\frac{\alpha}{\alpha+\omega\omega'}=\frac{\omega\omega_a}{\omega'\omega'_a}=\frac{c^2}{b^2},$$

d'où

$$\alpha=\frac{c^2}{b^2-c^2}\cdot\omega\,\omega'.$$

De même

$$\beta=\frac{a^2}{c^2-a^2}\cdot\omega\omega'; \qquad \gamma=\frac{b^2}{a^2-b^2}\cdot\omega\omega'.$$

(1)
$$\frac{A'B+B\omega_a}{A'B+B\omega'_a}=\frac{\omega\omega_a}{\omega'\omega'_a}=\frac{c^2}{b^2}.$$

Mais $B\omega_a=B\omega\cos\omega=\dfrac{c\sin\omega\cos\omega}{\sin B}=R\dfrac{c}{b}\cdot\sin 2\omega;$

$$B\omega'_a=a-c\omega'_a=a-\frac{b\sin\omega\cos\omega}{\sin c}$$

$$=a-2R.\frac{b}{c}\sin\omega\cos\omega=a-\frac{R.b}{c}\sin 2\omega.$$

(1) devient $A'B=\dfrac{c}{b^2-c^2}[ac-2R.b\sin 2\omega];$

alors $\dfrac{p_c}{p_b}=\dfrac{A'B+a}{A'B}=\dfrac{b(ab-2Rc\sin 2\omega)}{c(ac-2Rb\sin 2\omega)},$

et de même $\dfrac{p_c}{p_a}=\dfrac{a(ab-2Rc\sin 2\omega)}{c(bc-2Ra\sin 2\omega)}.$

La relation donnée devient alors, après quelques simplifications :

(2)
$$\sin 2\omega\,[a^6(b^4-c^4)+b^6(c^4-a^4)+c^6(a^4-b^4)]$$
$$=2S.[a^6(b^2-c^2)+b^6(c^2-a^2)+c^6(a^2-b^2)].$$

Or, on sait que

$$\cot g\,\omega=\frac{\Sigma a^2}{4S};$$

cette égalité donne

$$\sin 2\omega=2S.\frac{\Sigma a^2}{\Sigma a^2b^2},$$

et (2) se réduit facilement à une identité.

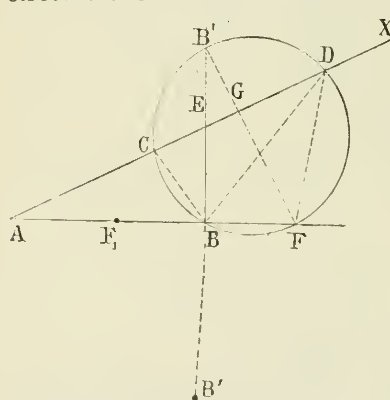
QUESTION 636

Solution par M. DAVIDOGLOU

On donne deux points fixes A *et* B. *1° Déterminer sur une droite* AX, *menée par* A, *deux points* C, D *tels que* $BC \times BD$ *ait une valeur donnée* m^2 *et qu'en même temps* AB *soit la bissectrice extérieure de l'angle* CBD; *2° Quel est le lieu des points* C *et* D *lorsque* AX *tourne autour de* A?

Mêmes questions en supposant que AB *soit la bissectrice intérieure de l'angle* CBD. (Bernès.)

1° La bissectrice intérieure de CBD coupe AX en E et la circonférence CBD en B′. On sait que $BE.BB' = BC.BD$;



donc $BB' = \frac{m^2}{BE}$, et le point B′ est connu. Si le cercle BCD coupe AB en F, on a :

$$\frac{BF}{BB'} = \frac{BE}{AB},$$

ou $$BF = \frac{m^2}{AB}.$$

La circonférence BB′F coupe AX aux points cherchés C, D. Pour que ces deux points existent, il faut que le cercle BB′F coupe AX; ou, qu'en désignant par R le rayon du cercle BCD, on ait

(1) $$FG < 2R.$$

Or,

$$FG = AF \sin A = \left(AB + \frac{m^2}{AB}\right)\sin A\,;\quad 2R = \frac{BF}{\sin A} = \frac{m^2}{AB.\sin A}.$$

1) s'écrit $$m^2 > \overline{AB}^2.\text{tg}^2 A.$$

Le symétrique B'_1 de B′, par rapport à AB, et le symétrique F_1 de F par rapport à B, donnent le cercle B'_1F_1B.

qui coupe AX aux points C_1 et D_1, correspondant au cas de la bissectrice intérieure.

2° Les triangles BDF et ADF étant évidemment semblables :

$$\overline{DF}^2 = \overline{Fc}^2 = AF.BF = \frac{m^2}{AB}\left[AB + \frac{m^2}{AB}\right].$$

Le lieu des points C et D est une circonférence de centre F et de rayon $R' = \frac{m}{AB}\sqrt{m^2 + \overline{AB}^2}$.

De même pour C_1 et D_1, etc.

Nota. — Autre solution par M. Droz-Farny.

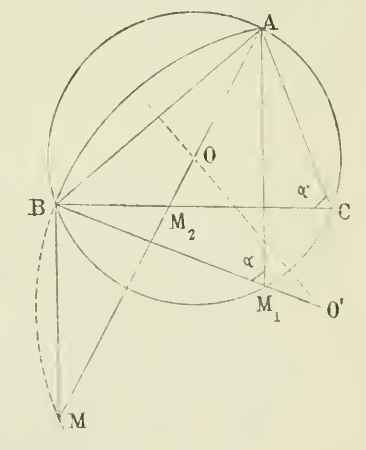
QUESTIONS 637 ET 639

Solutions, par M. Davidoglou.

637. — *On donne un angle* A, *et, sur l'un des côtés, un point fixe* B. *Lieu de* M *tel que le rayon qui passe par* B *dans le cercle* ABM *fasse un angle donné* α *avec l'isogonale* AX *de* AM *relativement à l'angle* A.

Cas où α *est droit.*

(Bernès.)



639. — *Dans l'angle* A *d'un triangle* ABC *on trace deux isogonales variables dont l'une rencontre en* M_1 *la circonférence* ABC. *Trouver le lieu du point* M *où l'autre droite est rencontrée par la circonférence qui, passant par* A *et* B, *a son centre sur* BM_1. (Bernès.)

Ces deux problèmes sont au fond identiques.

Si, sur AB, nous décrivons un segment de cercle capable de l'angle α, ce segment coupe l'autre côté de l'angle A en C et C', on a ainsi le problème 639. Soient O et O' les centres des cercles ABC et ABM, puis M_2 le point où AM

coupe BC. On a :

$$\widehat{BMA} = \widehat{BO'O} = 90^\circ - [\widehat{A+B} - \widehat{BAM_1}] = \widehat{BAM_1} + \widehat{C} - 90^\circ;$$

d'autre part : $\widehat{BM_2M} = 180^\circ - \widehat{BAM}.$

Donc $\widehat{BMA} + \widehat{BM_2M} = 90,$

et le lieu de M est la perpendiculaire en B à BC.

Autrement (*). — La droite BM coupe la perpendiculaire élevée sur BA en son point milieu D en ω, centre de la circonférence qui passe par A et B, et qui coupe l'isogonale AM′ de AM en P; on a :

$$AM = C,$$

donc $\omega BA = C + \alpha$

angle $B\omega D = BPA = 90 - (C + \alpha)$,

et comme angle $M'AB = A - \alpha$,

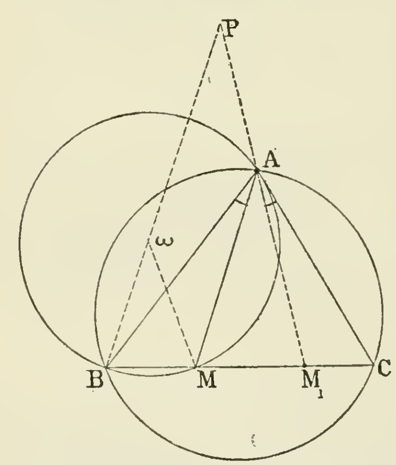
on obtient : angle $PBA = A + C - 90 - B$; etc...

QUESTION 638

Solution par M. Davidoglou.

Dans l'angle A *d'un triangle* ABC *on trace deux droites isogonales variables dont l'une rencontre* BC *en* M ; *trouver le lieu du point* P *où l'autre droite est rencontrée par le rayon* $B\omega$ *du cercle* ABM.

(Bernès.)



AP coupe BC en M_1 ; on a :

$$\widehat{AM_1B} = \widehat{C} + \widehat{BAM};$$

$$\widehat{PBC} = 90^\circ - \frac{\widehat{B\omega M}}{2}$$

$$= 90^\circ - \widehat{BAM}.$$

Par suite :

$$\widehat{BPA} = 90^\circ - C.$$

Le lieu de P est donc un cercle décrit sur BA comme corde et capable d'un angle $= 90^\circ - C$.

(*) Cette solution de la question 639 est de M. Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

683. — Les points remarquables du plan d'un triangle qui se construisent avec le plus de simplicité sont : le centre du cercle circonscrit qui n'exige que 12 opérations élémentaires, le centre de gravité et l'orthocentre qui en exigent 16. Montrer qu'on peut construire le point de Nagel, dont les coordonnées normales sont : $\frac{p-a}{a}$, $\frac{p-b}{b}$, $\frac{p-c}{c}$ et le point M qui a pour coordonnées normales : $\frac{2a-p}{a}$, $\frac{2b-p}{b}$, $\frac{2c-p}{c}$, l'un et l'autre aussi avec 16 opérations élémentaires, et qu'il en est de même des transformés continus de ces deux points.

La démonstration peut se déduire presque immédiatement de la valeur donnée des coordonnées. *(E. Lemoine.)*

684. — Si $\alpha = 10^\circ$, on a

$$\cot\alpha \cot 3\alpha \cot 5\alpha \cot 7\alpha = \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 8\alpha.$$

(Georges-F. d'Avillez.)

685. — Dans un triangle, on donne : 1° la direction d'un des côtés ; 2° deux des points remarquables de la droite d'Euler.

On propose de construire ce triangle.

N. B. — Les points remarquables qu'il faut considérer sont :

Le point O, centre du centre circonscrit; H, l'orthocentre; le centre ω du cercle des neuf points; G, le centre de gravité.

(Georges-F. d'Avillez.)

686. — Les perpendiculaires élevées en α, β, γ sur les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, l'orthique de ABC, interceptent sur les côtés BC, CA, AB des segments x, y, z, tels que

$$\frac{a-x}{a+x} + \frac{b-y}{b+y} + \frac{c-z}{c+z} = 1.$$

(Davidoglou.)

687. — Si, dans un triangle, le triple d'un côté égale la somme des deux autres, le cercle inscrit est tangent au cercle

inscrit dans le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle donné. *(Davidoglou.)*

688. — Démontrer, que si l'on a :

(1) $$\operatorname{tg}^2\alpha . \operatorname{cotg}\beta = 1,$$

(2) $$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{a}{b},$$

(3) $$\frac{\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha} = \frac{a}{c},$$

on a aussi $$\frac{a^2 + (b - c)^2}{a^2 - (b - c)^2} = \frac{c}{2(b - c)}.$$

(Davidoglou.)

689. — On donne une sphère, une de ses cordes et un point arbitraire o sur cette corde. Par ab, on mène un plan quelconque qui coupe la sphère suivant le petit cercle C.

Démontrer qu'on peut inscrire dans C une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à un cercle de centre o. Si l, m, n, sont les côtés d'un de ces triangles, faire voir que $\frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn}$ est constant, quel que soit le triangle et quel que soit le plan mené par ab.

(Mannheim.)

RECTIFICATIONS

1° La question 675 est identique à la question 634 ; la solution paraîtra dans le n° prochain ;

2° M. Tzitzéica nous fait observer, avec raison, que la question 568 a été résolue à la page 46 et à la page 202, et que c'est, par oubli de la première solution, que j'ai publié la seconde.

Le Directeur-gérant.
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21346-10-95.

SUR LE CLASSEMENT DES RACINES

APPARTENANT A DEUX ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Par M. **Elgé.**

Dans le numéro d'octobre dernier du *Bulletin de Mathématiques élémentaires*(*), M. Vitasse a présenté une méthode dont la rigueur ne laisse rien à désirer et qui permet de classer les racines, supposées réelles, de deux équations données, du second degré. Il est possible, pensons-nous, de simplifier quelque peu l'exposition théorique et surtout les règles pratiques.

Prenons les équations sous la forme

$$x^2 + px + q = 0,$$
$$X^2 + p'X + q' = 0.$$

On peut observer que si l'on effectue une transformation en posant

$$x = u + h,$$
$$X = U + h,$$

les nouvelles racines seront classées dans le même ordre que les anciennes et nous pouvons résoudre le problème proposé sur les équations

$$u^2 + (2h + p)u + h^2 + ph + q = 0,$$
$$U^2 + (2h + p')U + h^2 + p'h + q' = 0.$$

Nous disposerons de la quantité arbitraire h de façon que

$$ph + q = p'h + q',$$

et en supposant $p \neq p'$(**), nous avons

$$h = \frac{q - q'}{p' - p}.$$

(*) Ce journal, publié sous la direction de M. Niewenglowski, vient de se fonder à la Société d'éditions scientifiques. Le numéro auquel il est fait, ici, allusion est le nº 2; on trouvera l'article cité à la page 21.

(**) Si $p = p'$, les racines portées sur une droite, à partir d'une origine O, forment, sur cette droite, une division isotomique. Les deux racines de l'une des équations données renferment les deux racines de l'autre. On distingue celle des équations qui joue le premier rôle au moyen du signe des quantités q, q', $q - q'$. La discussion n'a aucune difficulté.

Les équations que nous avons à considérer sont

$$(1) \qquad u^2 + Pu + Q = 0,$$

$$(2) \qquad U^2 + P'U + Q = 0;$$

en posant

$$P = 2h + p,$$
$$P' = 2h + p',$$
$$Q = h^2 + ph + q.$$

Soient α, β les racines de (1); α', β' celles de (2). En observant que

$$(3) \qquad \alpha\beta = \alpha'\beta',$$

on voit qu'il suffit de ranger les deux plus grandes racines de la suite α, β, α', β' et les racines *majeures* (comme on peut les appeler pour la commodité du langage, dans cette discussion) ne peuvent pas appartenir à la même équation; cette remarque est une conséquence de l'égalité (3). Nous désignerons ces racines par α, α'; β, β' s'appelleront les racines *mineures*.

Si Q est négatif, les relations

$$\alpha + P + \frac{Q}{\alpha} = 0,$$

$$\alpha' + P' + \frac{Q}{\alpha'} = 0,$$

donnent

$$(\alpha - \alpha')\left(1 - \frac{Q}{\alpha\alpha'}\right) = P' - P.$$

D'ailleurs, les équations proposées ayant une racine positive, l'autre racine étant négative, les majeures α, α' sont des quantités positives; ainsi, dans notre hypothèse $Q < 0$, le second facteur du premier membre est positif. Le signe de $\alpha - \alpha'$ est donc le même que celui de $P' - P$; et comme $P' - P = p' - p$, on voit finalement que le signe des quantités Q et $p' - p$ détermine le classement des quatre racines.

Si Q est positif, les identités

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta,$$

$$\left(\frac{\alpha' + \beta'}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)^2 = \alpha'\beta',$$

donnent, puisque $\alpha\beta = \alpha'\beta'$,

$$\frac{P^2 - P'^2}{4} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha' - \beta'}{2}\right)^2.$$

Ainsi, $\alpha - \beta$ sera plus grand, ou plus petit que $\alpha' - \beta'$, suivant le signe de $P^2 - P'^2$, c'est-à-dire suivant le signe de

(4) $$(p - p')(4h + p + p').$$

Si nous prenons, sur une droite, les longueurs :

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta, \quad OA' = \alpha', \quad OB' = \beta';$$

comme $OA.OB = OA'.OB'$, les points A′, B′ sont tous les deux sur le segment AB, ou tous les deux à l'extérieur. Il faut distinguer les deux cas; et, à cet effet, voir si AB est plus grand ou plus petit que A′B′. C'est ce qu'indiquera le signe de (4).

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DU CERCLE CONJUGUÉ A UN TRIANGLE

Par M. **S. Chassiotis** (*).

(*Suite* et *fin*, voir page 218.)

2. — Soient f, f', f'' les trois autres foyers des trois hyperboles qui correspondent, d'après le théorème VI, à un triangle donné ABC. Si nous remarquons que f, f', f'' sont les symétriques du point de concours des hauteurs H par rapport aux milieux $\alpha\beta\gamma$ des trois côtés, nous voyons que le cercle $ff'f''$ est homothétique au cercle des neuf points du triangle ABC par rapport au point H, + 2 étant la puissance d'homothétie, par suite, les cercles ABC et $ff'f''$ coïncident; nous aurons ainsi le théorème suivant :

Théorème IX. — *Les foyers* f, f′, f″ *des hyperboles* (H), (H′), (H″), *qui correspondent à un triangle* ABC (d'après le théorème IV), *sont sur le cercle circonscrit au triangle.*

Il est facile de déduire de là que :

Le lieu des foyers des hyperboles correspondant à tous les triangles inscrits dans un cercle donné et ayant un orthocentre H *fixe est la circonférence* O.

(*) Dans l'énoncé du théorème VI une erreur a été commise. D'après le théorème VI les asymptotes étant les tangentes menées par les milieux des côtés au cercle conjugué, il est évident que ces tangentes ne sont pas rectangulaires, en général par conséquent les hyperboles correspondantes au triangle ne sont pas équilatères.

Remarque IV. — Les points de contact des hyperboles avec les côtés sont à l'intersection des côtés avec les parallèles qui leur sont menées par le point de concours de hauteurs. Pour démontrer cette propriété, il suffit de chercher les pôles des tangentes aux points A, B, C, aux circonférences décrites sur les côtés comme diamètre, par rapport au cercle conjugué au triangle ABC. Comme ces dernières circonférences passent par les pieds des hauteurs, il est évident que les hyperboles (H), (H′), (H″) seront tangentes aux parallèles, aux côtés du triangle menées par les sommets.

On établira sans peine le théorème suivant :

Théorème X. — *Les points de contact des côtés du triangle* ABC *et de leurs parallèles menées par les sommets forment trois parallélogrammes dont les centres sont les milieux des côtés du triangle.*

3. — Soit ABC un triangle B′C′, C′A′, A′B′ les parallèles aux côtés menées par A, B, C. Le point O du concours des hauteurs du triangle ABC est le centre du cercle circonscrit au triangle A′B′C′. Alors en appliquant les théorèmes VI–X on verra que :

1° *Etant donné un triangle* A′B′C′, *il existe trois hyperboles ayant un foyer commun au centre du cercle circonscrit au triangle et tangentes à deux côtés du triangle et à deux de leurs parallèles passant par les milieux* A, B, C, *des côtés.*

2° *Les foyers* f, f′, f″ *non communs se trouvent sur le cercle de neuf points du triangle* A′B′C′, *etc.*

Théorème I. — *Le cercle conjugué à un triangle* ABC *coupe les hyperboles correspondant à* ABC *à angle droit ; il en est de même pour le cercle circonscrit au triangle formé par les parallèles aux côtés du triangle menées par les sommets.*

En effet, soient (H), (H′), (H″) les hyperboles correspondant à ABC, ils ont un foyer commun qui est le centre du cercle conjugué, c'est-à-dire le centre des hauteurs. Or, un cercle pouvant être regardé comme ayant deux foyers confondues dans son centre, il en résulte que le cercle conjugué est une conique homofocale avec les hyperboles (H), (H′), (H″). On en conclut le théorème.

Démonstration analogue pour le cercle circonscrit.

Signalons enfin comme dernière propriété celle que l'on obtient en prenant la polaire réciproque du cercle de neuf points par rapport au cercle conjugué.

Théorème II. — *Les directrices des hyperboles* (H), (H'), (H'') *correspondant à un triangle donné* ABC *et les parallèles* B'C' C'A', A'B' *aux côtés du triangle menées par les sommets sont tangentes à une même conique* C *ayant un foyer au centre du cercle conjugué.*

Cette conique est la transformée par polaire réciproque du cercle de neuf points par rapport au cercle conjugué.

Théorème III. — *De plus elle est tangente à quatre coniques circonscrites au triangle* ABC *et ayant un foyer commun au centre des hauteurs.* Car le cercle de neuf points d'un triangle est tangent un cercle inscrit et aux cercles ex-inscrits à ce triangle.

CORRESPONDANCE

Voici la lettre que mon ami M. Lemoine m'a adressée, en réponse au compte rendu que j'ai donné, dans le dernier numéro, du Traité d'Arithmétique qu'il vient de faire paraître en collaboration avec notre ami commun M. Laisant ; lettre que j'ai annoncée dans le numéro cité. Je la publie en respectant l'*orthographe nouvelle :* je désire pourtant déclarer que la réforme en question ne me semble ni logique, ni suffisamment radicale. Mais les lecteurs pourront se faire une opinion, dans un sens ou dans l'autre, d'après le spécimen, ici publié.

Mon cher ami,

Je vous remercie, en mon nom et au nom de notre ami Laisant, mon colaborateur, du compte rendu aimable que vous avez fait de notre petit *Traité d'aritmétique*, mais nous voulons de plus vous expliquer notre pensée sur le point qui vous a inspiré quelques légères réserves et engagé à prendre la défense du corps enseignant, en vous disant que nous ne l'attaquons en aucune façon, ni directement, ni entre les lignes.

Il ne s'agit nulement du talent ou de la compétence de vos collègues, nous la conaissons et nous l'aprécions; il s'agit de contribuer à faire renoncer *définitivement*, du haut en bas de l'échèle, à l'emploi séculaire d'un moule, que vous jugez incorect aussi bien que nous, et duquel sont tirés quelques principes primordiaus et quelques définitions; les moules séculaires sont très solides; cète afirmation est une La Paliçade.

Que beaucoup de professeurs distingués, comme le sont la plupart des professeurs de l'Université, n'en soient plus à ces errements, nous le savons, mais les ouvrages récents, au courant des derniers perfectionements didactiques come l'aritmétique de M. Andoyer, que vous citez, n'empêchent pas qu'il y en ait beaucoup trop encore qui ne méritent pas le même compliment.

La définition que nous proposons pour le nombre, qui est une chose *abstraite*, est *abstraite*, c'est vrai, mais si simplement! Ne serait-ce pas là une qualité qui peut avoir l'avantage d'habituer l'esprit dès le début, au terrain des abstractions, qu'il aborde ainsi par un chemin très facile; nous ne répondrons pas, d'ailleurs, autrement à cète observation, car c'est à l'expérience de décider, en dernier ressort si cète définition, rigoureuse et comode, présente des dificultés rèèles de conception pour les jeunes intelligences, dificultés qui doivent la faire rejeter malgré ses avantages absolus.

Quant à la réforme de l'ortografie. j'y ai pris une part spécialement active dans la préparation de notre petit livre et c'est pour en dire quelques mots, que je me suis décidé à vous écrire cète lettre avec l'assentiment de Laisant, qui aprouve d'ailleurs complètement ma manière de voir.

Tout le monde est d'accord pour reconaître que notre ortografie a des anomalies singulières, qu'èle est remplie de chinoiseries ridicules, lesquèles, pour être très concrètes, n'en font pas moins perdre à l'enfance de longues heures qui seraient mieus employées à tout autre chose. Ce sont *seulement* les irrégularités *choquantes*, les exceptions *fautives*, les plus grosses verrues enfin de notre bèle langue écrite, qu'il s'agit de faire disparaître; l'avantage est évident et le misonéisme me semble seul pouvoir susciter des objections; mais

la rendre complètement logique, par simple fonétisme, par exemple, si la chose était possible — ce que je ne crois pas, à cause surtout de la variété des prononciations — ce serait un crime puisque la langue en serait défigurée, heureusement : *est modus in rebus.*

En fait, la question de la réforme est à l'ordre du jour un peu partout, il y a même plusieurs sistèmes proposés ; cette multiplicité, dans l'espèce, n'est ni un défaut, ni un inconvénient ; chaque home instruit adoptera le sistème de réforme qui lui conviendra le mieus ; il y aura alors pendant dix, pendant vingt ans peut-être, une anarchie ortografique féconde, come au XVI[e] siècle, d'où sortira un usage que l'Académie sanctionera ; c'est le seul rôle de l'Académie, èle n'a point à prendre l'initiative des réformes, *èle ne l'a jamais fait* et avec raison ; c'est vous, c'est nous tous, qui faisons la langue ortografique, ce n'est point èle ; nous décidons et èlle codifie quand l'heure est venue.

Parmi les divers sistèmes de réforme, nous en avons choisi un que nous trouvons logique, modéré dans ses propositions et nous avons oficièlement passé, avec notre aritmétique, des régions de la discussion spéculative à cèles de la pratique, voilà tout. *Quand il sait l'ortografie classique,* il ne faut pas deus heures d'atension à un home, habitué à la réflexion, pour transformer de cète façon sa manière d'ortografier certains mots.

Mais nous voilà bien loin du champ de la Matématique, aussi je termine court en vous serrant cordialement la main.

Extrait d'une lettre de M. Aubry.

... A propos de la formule

$$\frac{H}{6}(B + 4B' + B''),$$

appelée *omniformule* dans un des volumes de votre journal (*) et, ailleurs, *formule de Sarrus, règle des trois niveaux,* permettez-moi de rappeler que j'ai donné, dans le dernier article que je

(*) *Journal,* 1886, p. 79.

vous ai envoyé (*Hist. de la géom. de la mesure*), une démonstration de cette célèbre formule en l'appelant *formule de Torricelli*, m'appuyant sur certains auteurs italiens, entre autres, Peri et Bellachi (*I principi della geometria moderna, Pistoia*, 1873). Je crois, en effet, me rappeler en avoir vu quelque chose dans les *Ex. géom.* (1647) de Torricelli. L'*Interm. des Math.* vient de poser la question de l'origine de cette formule. Si je me suis trompé, je vous prierais de rectifier l'endroit en question, sachant que vous avez à cœur d'établir autant que possible les droits des inventeurs. Ne possédant plus les œuvres de Torricelli, n'ayant pu encore les retrouver et ne voyant pas quand je pourrai rechercher moi-même à Paris si mes souvenirs sont exacts, je suis forcé d'attendre la réponse qu'on fera dans l'*Intermédiaire* à la question posée.

Si cette formule n'est pas de Torricelli, elle est sûrement de Marc-Laurin (*A Treatise of Fluxion*). Voici, en effet, ce qu'il dit dans son introduction :

Considérons un solide formé par une section conique qui tourne autour de son axe ; la portion d'un tel solide terminée par deux plans parallèles et le cylindre, de même hauteur que cette portion, ayant une base égale à la section moyenne, diffèrent toujours l'un de l'autre de la même quantité, pour une même inclinaison des plans sécants sur l'axe et une même hauteur.

Je ne m'explique pas comment M. Maleyx (*N. A.*, 1880) a trouvé la formule de Torricelli dans le même ouvrage de Mac-Laurin : car, comme l'a remarqué M. Rey (*J. E.*, 1886, p. 171), la formule $\frac{A + 4B}{6}$ R ... n'est qu'une formule d'approximation générale qui n'est même pas de Mac-Laurin, mais qui avait été donné auparavant par Côtes (*Harm. mens.*), Stirling (*De summatione ser.*) et Newton (*Meth. diff.*).

La formule me paraît donc devoir être attribuée à Torricelli, ou à Mac-Laurin tout au moins, pour le cas où la section est une fonction du deuxième degré par rapport à la hauteur de la section. Il resterait à découvrir qui a vu d'abord qu'elle avait lieu également, quand la section est une fonction du troisième degré : c'est ce que je ne puis établir avec certitude ; ce point est d'ailleurs de moindre importance.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

414. — *Si* n *est une somme de deux triangulaires,* $4n+1$ *est une somme de deux carrés, et réciproquement.*

En effet
$$n = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2}$$
entraîne
$$4n+1 = (x+y+1)^2 + (x-y)^2,$$
et réciproquement.

415. — *Les notations étant celles employées dans notre Note sur les centres isodynamiques et les centres isogones* (J. M. E., *Année 1889, p. 99*), *et en outre,* F *désignant le milieu de* GH, P′ *le symétrique de* P_1 *par rapport à* V_2, V′ *le symétrique de* V *par rapport à* V_2, K'_1 *le point d'intersection de* GW, HW_2; e *l'intersection de* OK *et* FP_2, i *l'intersection de* GV *et* FW, *démontrer que les coordonnées normales de ces nouveaux points sont respectivement (à une constante près) :*

(V′) $x = 9\cos B\cos C - \sin B\sin C + \sqrt{3}\sin A$
$= 4\cos B\cos C + \sin(A - 30°)$,

(P′) $x = \sin A + 2\sqrt{3}\cos B\cos C$,

(i) $x = 3\cos(B - C) + 2\sin B\sin C - \sqrt{3}\sin A$
$= 4\sin B\sin C - \sqrt{3}\sin(A + 60°)$,

(K′) $x = \cos B\cos C + \sin(A - 30°)$,

(e) $x = 2\sin A - \sqrt{3}\cos A$,

(l_2) $x = 2\cos B\cos C + \sin(A - 30°)$.

En outre :
V′ est à l'intersection des droites HW_2, FW,
P′ à l'intersection des droites O_9W, FP_2, HK,
i est situé sur O_9V_2,
K′ est situé sur FP_2,
P_1 est situé sur OK′,
KK′ est parallèle à la droite d'Euler OGH,
l_2 est à l'intersection des droites O_9W, HW_2, FL′, OV_2,
L_2l_2 est parallèle à OGH.

Les groupes des quatre points suivants constituent une division harmonique :

VL_2KW, VKL'_2W. FV_2KW_2, $V_2iL'P_2$,
$O_9iP_2V_2$, GiW_2V, $FiWV'$, $P_2iV_2L'_2$,
$O_9L'P_2L'_2$, V_2GWK', $P'FP_2K'$, $LO_9L_2W_2$,
L'_2eWK, KOWE, $W_2V'l_2K'$, $Hl_2L'^2W_2$.

Toutes ces propriétés se déduisent aisément de considérations géométriques élémentaires.

416. — *Distances de points remarquables dans le triangle.*

(Les notations sont celles de notre note *J. M. E.*, année 1892, p. 248, et celles de l'exercice précédent.)

$$VL_2 = \frac{2R}{\sqrt{3}\cot g\,\theta + 1}\sqrt{\frac{\cot g\,\theta - \sqrt{3}}{\cot g\,\theta + \sqrt{3}}}.$$

$$WL_2 = \frac{4R}{\sqrt{3}\cot g\,\theta + 1}\sqrt{\frac{\cot g\,\theta + \sqrt{3}}{\cot g\,\theta - \sqrt{3}}},$$

$$VL'_2 = \frac{4R}{\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1}\sqrt{\frac{\cot g\,\theta - \sqrt{3}}{\cot g\,\theta + \sqrt{3}}},$$

$$WL'_2 = \frac{2R}{\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1}\sqrt{\frac{\cot g\,\theta + \sqrt{3}}{\cot g\,\theta - \sqrt{3}}}.$$

$$\overline{HV}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - \cot g\,\theta - 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi(\sqrt{3} + \cot g\,\theta)},$$

$$\overline{HW}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - \cot g\,\theta + 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi(\cot g\,\theta - \sqrt{3})},$$

$$\overline{KK'}^2 = \frac{S(\operatorname{tg}\varphi\cot g\,\theta - 9)}{6\operatorname{tg}\varphi\cot g^2\theta},$$

$$\overline{QK}^2 = \frac{S(\operatorname{tg}\varphi\cot g\,\theta - 9)}{2\operatorname{tg}\varphi\cot g^2\theta(\cot g^2\theta - 3)},$$

$$\overline{OL}^2 = R^2 - \frac{S(\sqrt{3}\cot g\,\theta + 1)(4\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi + 3\operatorname{tg}\varphi\cot g\,\theta + 1)}{\operatorname{tg}\varphi(5 + \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{OL'}^2 = R^2 - \frac{S(\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1)(4\sqrt{3}\operatorname{tg}\varphi - 3\operatorname{tg}\varphi\cot g\,\theta - 1)}{\operatorname{tg}\varphi(5 - \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{HV_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - 3\cot g\,\theta)}{3\operatorname{tg}\varphi(\sqrt{3} + \cot g\,\theta)},$$

$$\overline{HW_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - 3\cot g\,\theta)}{3\operatorname{tg}\varphi(\cot g\,\theta - \sqrt{3})},$$

$$\overline{HL'}^2 = \frac{6S(\cot g\,\theta - \sqrt{3})(2\sqrt{3} + \operatorname{tg}\varphi - \cot g\,\theta)}{\operatorname{tg}\varphi(5 - \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{HL}^2 = \frac{6S(\cot g\,\theta + \sqrt{3})(\operatorname{tg}\varphi - \cot g\,\theta - 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi(5 + \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{HL_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - 3\cot g\,\theta)(\cot g\,\theta + \sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi(1 + \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{HL'_2}^2 = \frac{2S(\operatorname{tg}\varphi - 3\cot g\,\theta)(\cot g\,\theta - \sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi(\sqrt{3}\cot g\,\theta - 1)^2},$$

$$\overline{V_2L_2}^2 = \frac{8S(\operatorname{tg}\varphi - 3\cot g\,\theta)}{3\operatorname{tg}\varphi(\cot g\,\theta + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}\cot g\,\theta)^2},$$

$$\overline{W_2L'_2}^2 = \frac{8S\,(\operatorname{tg}\varphi - 3\operatorname{cotg}\theta)}{3\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\operatorname{cotg}\theta - 1)^2},$$

$$\overline{O_9V}^2 = \frac{R^2\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta - 3\sqrt{3}) + 4S(\operatorname{tg}\varphi - \sqrt{3})}{4\operatorname{tg}\theta\,(\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3})},$$

$$\overline{O_9W}^2 = \frac{R^2\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta + 3\sqrt{3}) + 4S\,(\operatorname{tg}\varphi + \sqrt{3})}{4\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})},$$

$$\overline{VL}^2 = \frac{8S\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\theta - 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3})\,(5 + \sqrt{3}\operatorname{cotg}\theta)^2},$$

$$\overline{WL'}^2 = \frac{8S\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\theta + 2\sqrt{3})}{\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})\,(5 - \sqrt{3}\operatorname{cotg}\theta)^2},$$

$$\overline{FK}^2 = \frac{S\,(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\theta - 9)\,(\operatorname{cotg}^2\theta - 3)}{18\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}^2\theta},$$

$$\overline{FV_2}^2 = \frac{S\,(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\theta - 9)\,(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})}{18\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3})},$$

$$\overline{FW_2}^2 = \frac{S\,(\operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\theta - 9)\,(\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3})}{18\operatorname{tg}\varphi\,(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})},$$

$$GZ = \frac{1}{2}\,FK \qquad O_9Z = \frac{1}{2}\,HK,$$

$$\overline{HP_1}^2 = \frac{S}{6\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{8\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{cotg}\theta + \sqrt{3}} + \frac{9 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\theta}{(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})^2} - 12\right],$$

$$\overline{HP_2}^2 = \frac{S}{6\operatorname{tg}\varphi}\left[\frac{8\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3}} + \frac{9 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{cotg}\theta}{(\operatorname{cotg}\theta - \sqrt{3})^2} - 12\right].$$

Distance Δ du point O au point

$$\frac{\alpha}{b+c} = \frac{\beta}{a+c} = \frac{\gamma}{a+b},$$

$$4\Delta^2 = (2R + r)^2 + 2r^2 - p^2.$$

Distance des isobariques de $\Gamma' =$

$$\Delta^2 = \frac{r^2}{(p-a)^2}\left[\delta_a^2 - 3\,(p-a)^2\right],$$

$$\overline{HD'}^2 = R^2(4\sin^4\theta + \sin^2\theta + 4) - 2S\operatorname{cotg}\theta.$$

Distance des brocardiens du point de Gergonne :

$$\Delta^2 = \frac{4r^2}{p^2}\,(\delta^2 - 3p^2).$$

On peut remarquer que cette distance est le double de la distance des isobariques de I, ou le double de $I\Gamma$.

Distance des brocardiens de Γ'_a :

$$\Delta^2 = \frac{4r^2}{(p-a)^2}\left[\delta_a^2 - 3\,(p-a)^2\right].$$

Cette formule et les deux précédentes ont été données par M. E. Lemoine (A. F. Congrès de Pau, 1892).

BACCALAURÉATS
(OCTOBRE 1895)

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE (LETTRES-SCIENCES).

Problème obligatoire: Deux forces données F, F′ sont respectivement parallèles à la base et à la longueur d'un plan incliné dont l'inclinaison i est inconnue. Elles sollicitent alternativement un point matériel pesant, posé sur le plan. On demande quel doit être le poids p de ce point matériel pour qu'il reste en repos dans les deux cas, et quelle est l'inclinaison du plan, cette dernière étant exprimée au moyen de la tangente. — Condition de possibilité du problème; — Quel doit être le rapport des deux forces F et F′ pour que i soit égal à 45°?

Trois questions à choisir : 1° Définir la dérivée d'une fonction d'une variable et montrer que la fonction continue $y = ax^2 + bx + c$ a une dérivée pour toute valeur de x; trouver par suite cette dérivée.

2° Étudier la variation de la fonction $y = \dfrac{ax + b}{a'x + b'}$ et construire la courbe représentative.

3° Montrer que l'équation du premier degré $Ax + By + C = 0$, représente dans tous les cas une droite dont les coordonnées des différents points sont les valeurs simultanées de x et y.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (LETTRES-MATHÉMATIQUES).

I. — *Problème obligatoire :*

On considère un trapèze isocèle ABCD et ses diagonales ASD et BSC, ainsi que la perpendiculaire OO′ abaissée, du point S, sur les deux côtés opposés parallèles. Quand on fait tourner la figure autour de OO′, le trapèze ABCD engendre un tronc de cône et les triangles ASB, CSD, engendrent deux cônes.

On demande de déterminer AB et CD, connaissant la hauteur OO′, le volume du tronc de cône ABCD et la somme des volumes des deux cônes ABS et CDS.

II. — *Trois questions à choisir :*

1° Géométrie descriptive. Angle de deux plans.
2° Géométrie descriptive. Distance d'un point à un plan.
3° Géométrie descriptive. Distance d'un point à une droite.

QUESTIONS 634 ET 675 (*)

Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne les trois points a, b, c *sur une droite. Quel est le lieu d'un point* m, *tel que*

$$\frac{1}{tg\,\mathrm{bma}} + \frac{1}{tg\,\mathrm{cmb}} = constante.$$

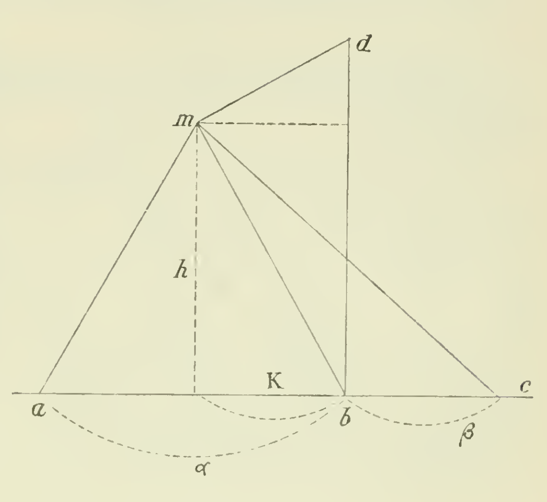
(Mannheim.)

(*) Comme nous l'avons observé (p. 264), les deux questions 634, 675 sont identiques.

La relation proposée peut s'écrire

$$\cot bma + \cot cmb = \text{constante}.$$

Représentons par α et β les distances ab et bc, par r la droite bm, par h la perpendiculaire abaissée de m sur abc et par K la distance de son pied à b. La relation proposée se transforme successivement en



$$\frac{1 - \frac{K}{h} \cdot \frac{\alpha - K}{h}}{\frac{K}{h} + \frac{\alpha - K}{h}} + \frac{1 + \frac{\beta + K}{h} \cdot \frac{K}{h}}{\frac{\beta + K}{h} - \frac{K}{h}} = \text{const.} = M,$$

$$\frac{(\alpha + \beta)(h^2 + K^2)}{\alpha\beta h} = M, \qquad \frac{r^2}{h} = \frac{\alpha\beta M}{\alpha + \beta} = \text{constante},$$

Élevons en m une perpendiculaire qui rencontre en d la perpendiculaire élevée en b sur ac ; on a évidemment

$$r^2 = h.(bd),$$

d'où

$$\frac{r^2}{h} = \widehat{bd} = \text{constante}.$$

Le lieu cherché est donc la circonférence décrite sur bd comme diamètre.

Nota. — Autre solution par M. Davidoglou, qui rattache la question 634 à la précédente.

QUESTION 640

Solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

Par le milieu C *d'une corde fixe* AB *et d'un ceccle* O , *on trace, de part et d'autre, de* CA *deux rayons* CM, Cm *également inclinés sur* CA .

1° Démontrer que la corde Mm *passe par un point fixe* Q *et que les cercles* QCM, QCm *sont orthogonaux au cercle* O.

2° Lieu du centre du cercle CMm . (Bernès.)

1° CQ étant la bissectrice extérieure de l'angle MCm, on a

$$CM.Cm = QM.Qm - \overline{CQ}^2;$$

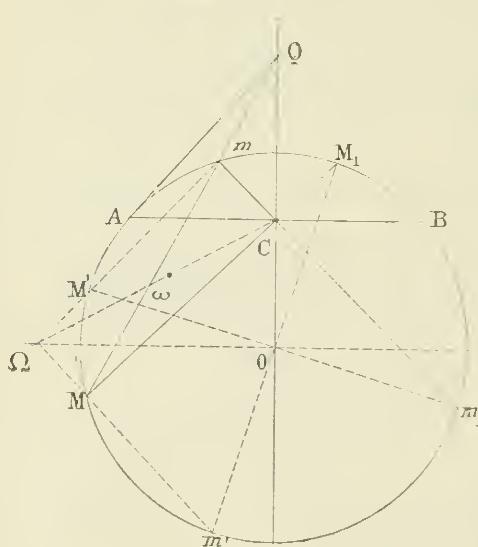
or $CM.Cm = CM.CM_1 = \overline{AC}^2$, $QM.Qm = \overline{QO}^2 - r^2$,

par suite $\overline{CA}^2 + \overline{CQ}^2 = \overline{QA}^2 = \overline{QO}^2 - r^2$,

et le point Q est le pôle de la corde AB.

Les cercles QCM, QCm sont orthogonaux au cercle O puisque

$$OC.OQ = r^2.$$



2° Menons en m et M les droites $m\Omega$, $M\Omega$, respectivement perpendiculaires à Cm, CM. Le centre ω du cercle circonscrit à CMm est le point milieu de CΩ. La perpendiculaire à Cm passe par le point M′, diamétralement opposé au point m_1, second point de rencontre de Cm avec la circonférence. Ce point est évidemment symétrique de M par, apport au diamètre parallèle à AB. De même, la perpendi-

culaire à CM passe par le point m', symétrique de m par rapport au même diamètre. Le lieu de Ω est donc ce diamètre lui-même et le lieu de ω la perpendiculaire élevée au milieu de CO.

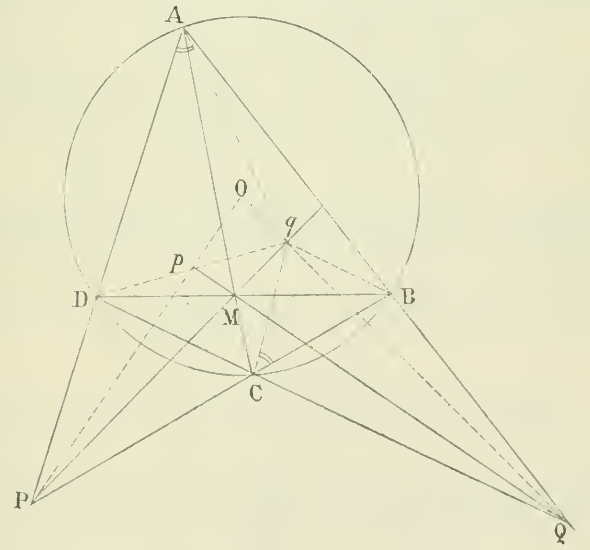
Nota. — Autres solutions par MM. Droz-Farny et Davidoglou.

QUESTION 641

Solution par M. A. Droz-Farny.

Dans un quadrilatère ABCD, AC, BD *se coupent en* M, AD, BC *en* P, AB, CD *en* Q. 1° *Montrer qu'il y a sur chaque côté du triangle* MPQ, *sur* MP, *par exemple, un point* q, *et un seul, tel que ce côté soit bissectrice intérieure ou extérieure de chacun des angles* AqB, CqD *sous lesquels, de* q, *on voit les côtés qui passent par* Q. 2° *Dans le cas où* ABCD *est inscriptible, faire voir que les quadrilatères* ADMq, BCMq, BDPq, CAPq *sont aussi inscriptibles et que* qA.qB = qC.qD = qM.qP. (Bernès.)

Quelle que soit la position du point q sur MP, les faisceaux



q(DPCQ) et q(APBQ) sont harmoniques. Si donc Pq doit être la bissectrice intérieure ou extérieure des angles AqB et

CqD, il faut nécessairement que l'angle PqQ soit droit; q est donc dans le triangle polaire MPQ, le pied de la hauteur abaissée du sommet Q sur la base MP. Comme MP est la polaire du point Q, on sait que cette hauteur passe par le centre O de la circonférence circonscrite à ABCD. Si donc le quadrilatère ABCD est inscriptible, il en est de même de $OpMq$; donc

$$PM.Pq = Pp.PO = PO(PO - OP) = \overline{PO}^2 - PO.Op = \overline{PO}^2 - \overline{R}^2.$$

Or $\overline{PO}^2 - \overline{R}^2$ exprime la puissance de P par rapport à la circonférence. Donc

$$PM.Pq = PA.PD = PC.PB;$$

les quadrilatères $ADMq$ et $BCMq$ sont donc inscriptibles :

$$\text{Angle } PDB = AqM = BqP,$$

donc $BDPq$ et pour la même raison $CAPq$ sont aussi inscriptibles.

On a : angle $CqA = CqB$;
angle $qAD = DMP = qMB = qCB$.

Les triangles AqD et BqC sont donc semblables, d'où :

$$\frac{Aq}{Cq} = \frac{Dq}{Bq}: \quad qA.qB = qC.qD$$

De même les triangles qDP et qMC sont semblables : en effet, angle $DqP = MqC$; en outre, angle $MCQ = MBq = DPq$;

donc $$\frac{qP}{qC} = \frac{qD}{qM}, \quad \text{d'où} \quad qC.qD = qP.qM.$$

Remarque. — La deuxième partie pourrait être démontrée a l'aide de la question 518, dont elle est la réciproque.

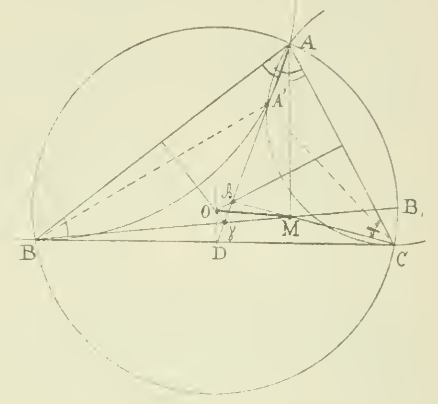
Nota. — Autre solution par M. Davidoglou.

QUESTION 647

Solution et **développements** par M. A. Droz-Farny.

Les médiatrices de AC, AB *dans le triangle* ABC *rencontrent en* β, γ *la médiane* AD. *Démontrez que* Cβ, Bγ *se coupent en* M *sur la symédiane et que* AM *est perpendiculaire sur* OM, O *étant le centre de la circonférence* ABC. (Bernès.)

Les deux circonférences tangentes en B et C au côté BC qui passent par A se coupent en un point A′, situé évidemment sur la médiane AD, car l'axe radical de ces circonférences doit diviser en parties égales leur tangente commune. Il en résulte :



$$\widehat{A'CB} = \widehat{DAC}$$

et $\widehat{A'BC} = \widehat{DAB}$.

Les triangles $C\beta A$ et $B\gamma A$ étant isoscèles, on a aussi :

$$\widehat{AC\beta} = \widehat{DAC}$$

et $\widehat{AB\gamma} = \widehat{DAB}$.

Les droites CA′ et $C\beta$ sont isogonales dans l'angle C et les droites BA′ et $B\gamma$ sont isogonales dans l'angle B ; par conséquent, $C\beta$ et $B\gamma$ doivent se croiser sur l'isogonale de AD, c'est-à-dire sur la symédiane issue de A.

Il en résulte

$$\widehat{MCA} + \widehat{MAC} = \widehat{DAC} + \widehat{DAB} = A.$$

donc $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} = 180 - A,$

$$\widehat{BMC} = \widehat{BOC} = 2A.$$

Les points B, O, M, C sont sur une même circonférence.

On en déduit que

$$\widehat{OMC} = OBC = 90 - A,$$

et $\widehat{CMK'} = A,$

donc $\widehat{OMA} = 90^\circ.$

On peut aussi faire les remarques suivantes :

1° M est un des sommets du second triangle de Brocard.

2° On a $\widehat{MAB} = \widehat{MCA}$, $\widehat{MAC} = \widehat{MBA}$, les circonférences CMA et BMA sont donc tangentes en A, respectivement, à AB et AC.

Ainsi M est le point double des figures semblables construites sur les côtés AC et AB.

3° MO passe par le centre du cercle d'Apollonius correspondant au côté BC.

4° Le triangle podaire de M est inversement semblable à ABC.

Nota. — Autre solution par M. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc.

QUESTION 648

Solution et développements par M. DROZ-FARNY.

H *étant l'orthocentre du triangle* ABC, S *le point diamétralement opposé à* A *sur le cercle* ABC, β, γ *les points où* BH, CH *rencontrent* AS, *démontrer que le point où se coupent les cercles* $AB\beta$, $AC\gamma$ *est la projection de* H *sur la médiane* AD.

(Bernès.)

Le diamètre AO étant l'isogonale de AH, on a :

angle $OAB = HAC = 90° - C$ angle $ABH = 90° - A$
donc $HBC = OAB$ et, par conséquent, la circonférence $AB\beta$ est tangente en B au côté BC; c'est un des *cercles adjoints* du triangle. De même, la circonférence $AB\gamma$ est tangente en C à BC. Leur axe radical doit donc diviser la tangente commune BC en deux parties égales; la droite AA'D est la médiane, issue de A.

$$\text{Angle } AA'B = A\beta B = 180 - B,$$
$$\text{angle } AA'C = A\gamma C = 180 - C.$$

Donc, angle $BA'C = 180 - A = BHC$; les quatre points B,A',H,C sont sur une même circonférence.

Ainsi, angle $HA'C = HBC = 90 - C$ et angle $CA'D = C$; donc angle $HA'D = HA'C + CA'D = 90°$.

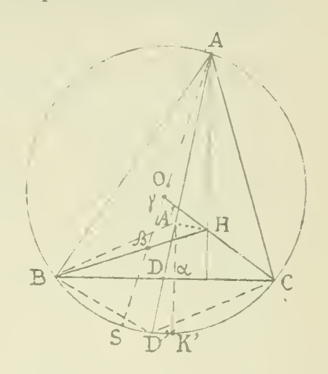
Le point A' jouit de nombreuses propriétés; en voic quelques-unes :

1° La médiane AA'D coupe le cercle ABC en D'. La figure A'BD' Cest un parallélogramme, car

$$\text{angle } CA'D' = BD'A$$

donc BD' parallèle CA'.

2° La perpendiculaire $A'\alpha$ sur BC coupe en K' la circonférence ABC; A' appartenant à la circonférence BHC, il en résulte que $A'\alpha = \alpha K'$; mais on a aussi $A'D = DD'$; donc D'K' est parallèle à BC et par conséquent AK' est l'isogonale de AD, donc la symédiane issue de A. Le point A' est donc le symétrique, par rapport à BC, du point où la symédiane KA coupe la circonférence circonscrite.



3° A' appartient au *cercle orthocentroïdal*.

4° Le triangle BA'D' étant semblable à ABC, on a

$$BA' : A'D' = c : a; \quad \text{de même,} \quad CA' : A'D' = b : a$$

donc :

$$BA' : CA' = c : b.$$

Le point A' appartient au *cercle d'Apollonius* correspondant au côté BC.

5° Le triangle podaire de A' est isoscèle. Son angle de base = A.

Il y aurait encore lieu de considérer le triangle A'B'C' inscrit dans le cercle orthocentroïdal et qui est semblable au triangle médian. On obtiendrait aisément de nouvelles propriétés de ces points.

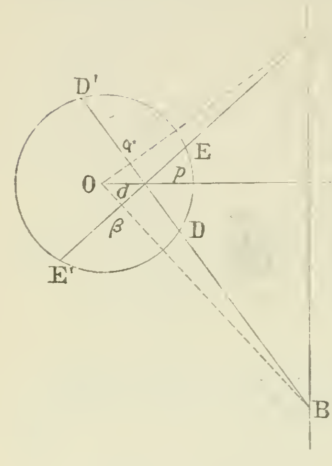
Nota. — Autre solution par MM. L'Huillier, répétiteur au lycée de Bar-le-Duc; Tzitzeica.

QUESTION 652

Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une circonférence de cercle et un point dans son intérieur De ce point, on mène deux droites conjuguées par rapport au cercle. Démontrer que, quelles que soient ces deux droites, la somme des inverses des carrés des cordes que le cercle intercepte sur elles est constante. (Mannheim.)

Soient DD′ et EE′ deux cordes conjuguées passant par le point P, A et B leurs pôles respectifs situés sur la polaire de P. Le triangle APB a O pour orthocentre, et soient α, β, γ les pieds des hauteurs et $OP = d$.



On a :

$$\gamma A . \gamma B = O\gamma\,(O\gamma - d) = \overline{O\gamma}^2 - R^2$$

$$\overline{DD_1}^2 = 4\left(R^2 - \overline{O\alpha}^2\right) = 4\left[R^2 - \frac{R^4}{\overline{OA}^2}\right] = 4R^2\,\frac{\overline{OA}^2 - R^2}{\overline{OA}^2}$$

$$= \frac{4R^2}{\overline{OA}^2}\left(\overline{O\gamma}^2 + \overline{\gamma A}^2 - R^2\right) = \frac{4R^2}{\overline{OA}^2}\left(\gamma A . \gamma B + \overline{\gamma A}^2\right) = \frac{4R^2 . \gamma A . AB}{\overline{OA}^2}.$$

De même $$\overline{EE_1}^2 = \frac{4R^2 . \gamma B . AB}{\overline{OB}^2}$$

$$\frac{1}{\overline{DD_1}^2} + \frac{1}{\overline{EE_1}^2} = \frac{\overline{OA}^2 . \gamma B + \overline{OB}^2 . \gamma A}{4R^2 . \gamma A . \gamma B . AB} = \frac{\left(\overline{O\gamma}^2 + \overline{\gamma A}^2\right)\gamma B + \left(\overline{O\gamma}^2 + \overline{\gamma B}^2\right)\gamma A}{4R^2\left(\overline{O\gamma}^2 - R^2\right)AB}$$

$$= \frac{\overline{O\gamma}^2 . AB + \left(\overline{O\gamma}^2 - R^2\right)AB}{4R^2\left(\overline{O\gamma}^2 - R^2\right)AB} = \frac{4R^2\left(\overline{O\gamma}^2 - R^2\right)}{2\overline{O\gamma}^2 - R^2}.$$

En posant enfin $O\gamma = \dfrac{R^2}{d}$, on trouve

$$\frac{1}{\overline{DD_1}^2} + \frac{1}{\overline{EE_1}^2} = \frac{2R^2 - d^2}{4(R^4 - d^2R^2)} = \text{constante.}$$

QUESTION 655

Solution par M. H. L'Huillier.

On considère un triangle ABC *et le cercle* Δ *circonscrit à* ABC. *Les parallèles à la tangente en* A *au cercle* Δ *menées par les points* B *et* C *rencontrent les côtés* AC *et* AB *en des points* A′A″

La droite A'A″ *coupe* BC *en* α. *Démontrer que* $A\alpha$ *et les droites analogues* $B\beta$, $C\gamma$ *passent par un même point.* (G. L.)

D'après un théorème bien connu la droite $A\alpha$ passe par les milieux P, Q de A'C et BA″. Ces droites étant antiparallèles avec BC par rapport à l'angle A, la droite $A\alpha$ est symédiane du triangle ABC, donc... etc.

Autrement (*). — On a :

$$\frac{C\alpha}{\alpha B} = \frac{BA'}{A''C};$$

mais les deux triangles semblables ABC, ABA' donnent :

$$(1) \qquad \frac{BA'}{BC} = \frac{AB}{AC}$$

de même, on a :

$$(2) \qquad \frac{A''C}{BC} = \frac{AC}{AB}.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, on a :

$$\frac{B'A}{A''C} \quad \text{ou} \quad \frac{C\alpha}{\alpha B} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'C}^2},$$

c'est-à dire que $A\alpha$ passe par le point de Lemoine (**).

N. B. — Solutions diverses par MM. DROZ-FARNY, GOYENS, TZITZÉICA.

QUESTION 657

Solution par M. A. DROZ-FARNY.

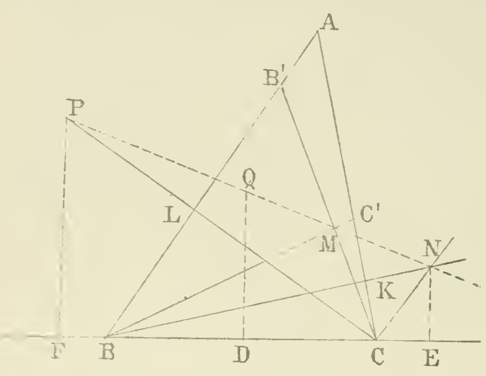
Le point M *où se coupent les deux droites symétriques de* BC, *l'une relativement à la hauteur* BK *du triangle* ABC, *l'autre relativement à la hauteur* CL *et les points* N *et* P *où ces mêmes hauteurs rencontrent respectivement la parallèle menée par* C *à* AB *et la parallèle menée par* B *à* AC, *sont trois points en ligne droite. De plus, si* Q *est la rencontre de cette droite* MNP *et de*

(*) Cette solution est de M. LEMOINE

(**) En indiquant cette propriété, j'avais eu pour objet principal une construction du point de Lemoine. Y en a-t-il de plus simple au point de vue géométrographique?

la médiatrice de BC, *les deux angles* QBC, QCB *sont égaux à l'angle* A *du triangle.* (Bernès.)

Portons sur CA et BA respectivement CK = KC′ et BL = LB′; les droites BC′ et CL′ sont les symétriques demandées se coupant en M. Il en résulte que faisceau B (C, K, C′P) $= -1$ = C(BLB′N) = C(BNB′L). Ces deux faisceaux ayant le rayon BC, commun, les points de rencontre P, M, N des couples de rayons homologues sont en ligne droite.



Soient E et F les projections de N et P sur AC; on a

$$CE = CN \cos B = \frac{CK \cos B}{\cos A} = \frac{a \cos B \cos C}{\cos A} = BF;$$ E et F sont donc isotomiques sur BC; on trouve de même

$$NE = \frac{a \sin B \cos C}{\cos A} \quad \text{et} \quad PF = \frac{a \cos B \sin C}{\cos A}$$

donc $$QD = a\frac{(\sin B \cos C + \cos B \sin C)}{2 \cos A} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} A,$$

ce qui prouve que QBC = QCB = A.

Remarque. — Si BQ et CQ coupent respectivement CA et BA en B et γ les circonférences ABβ et ACγ sont les cercles adjoints du triangle, tangents en B et C à BC.

Nota. — Autre solution par M. L'Huillier.

QUESTIONS PROPOSÉES

690. — Étant donné un triangle ABC, on inscrit dans l'angle A les deux cercles qui sont tangents à la fois aux côtés de l'angle et au cercle inscrit du triangle ABC; on inscrit de même les deux cercles qui sont tangents à la fois

aux côtés de l'angle et au cercle inscrit dans l'angle A. En agissant ainsi pour les angles B et C, on trace douze cercles dont le produit des rayons est égal à la quatrième puissance du produit du rayon du cercle inscrit multiplié par l'aire du triangle ABC. (*E.-N. Barisien.*)

691. — Par le point I, centre du cercle inscrit dans un triangle ABC, on mène une droite parallèle à BC qui rencontre AC en B′ et AB en C′; par le même point I, on mène une parallèle à AC qui rencontre BC en A′ et AB en C″, puis une parallèle a AB qui rencontre BC en A″ et AC en B″.

1° Démontrer les relations

$$\frac{IA'.IA''}{BC}=\frac{IB'.IB''}{AC}=\frac{IC'.IC''}{AB},$$

$$IA.IB'.IC'=A'A''.B'B''.C'C'.$$

2° Évaluer l'aire du triangle formé par les droites A′B′, A″C′ et B″C″. Dans quel cas cette aire est-elle égale à celle du triangle ABC?

3° On considère le cercle de rayon r_1 tangent en B″ et C″ aux côtés AC et AB, le cercle de rayon r_2 tangent en C′ et A″ aux côtés AB et BC, et le cercle de rayon r_3 tangent en A′ et B′ aux côtés BC et AC.

Démontrer la relation

$$\frac{r_1r_2r_3}{r_3}=\frac{2R^2}{p^2},$$

R, r et p désignant, respectivement, les rayons du cercle circonscrit, du cercle inscrit, et le demi-périmètre.

Nota. — D'après la question n° 1658 de M. Mannheim (*N.A.M.*, janvier 1894), parmi les cercles tangents aux trois cercles r_1, r_2, r_3, se trouverait le cercle des neuf points du triangle ABC. (*E.-N. Barisien.*)

692. — Éliminer φ entre les deux équations

$$x=\frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$y=\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}.$$

(*G. L.*)

693. — On considère une parabole P, de sommet O. On fait tourner, dans son plan, autour de O, d'un angle droit, la parabole P; soit Q sa nouvelle position.

Les deux paraboles P, Q ont un seul point réel commun A; sur OA, comme diamètre, on décrit une circonférence Δ.

Par un point M, arbitrairement choisi sur Δ, on mène des parallèles aux axes des paraboles P, Q; elles les rencontrent respectivement aux points p, q.

Démontrer que le triangle pMq est isoscèle. *(G. L.)*

694. — Plaçant le pôle d'une transformation par rayons vecteurs réciproques au sommet c d'un triangle donné abc, on prend les transformés a', b' des sommets a, b. Démontrer que le transformé du centre o du cercle inscrit au triangle abc est, sur la droite co, le centre du cercle ex-inscrit au triangle $a'cb'$. *(Mannheim.)*

695. — Étant donné un angle A, on considère une circonférence, ayant pour centre un point O de la bissectrice AR de l'angle et coupant les côtés de l'angle et les tangentes à la circonférence en deux points d'intersection B et E, situés sur l'oblique BE à la bissectrice et de côtés différents de cette droite. 1° Quels que soient la position du centre O sur la bissectrice et le rayon de la circonférence sécante, l'angle M des deux tangentes considérées est égal à l'angle A. 2° Le lieu du point d'intersection M des tangentes est la perpendiculaire, en A, à la bissectrice AR. *(E. Lebon.)*

696. — Trouver toutes les solutions entières des deux équations indéterminées

$$x^2 + 2y = u^2$$
$$x^2 - 2y = v^2$$

dans lesquelles x, y, u, v sont des inconnues.

(E. Lemoine.)

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 23452-11-95.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Concours divers.

Mélanges et Correspondance.

Bibliographie.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 43452-11-95.

